THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES POUTRES DROITES

PONTS MÉTALLIQUES

PONTS AMÉRICAINS, COMBLES.

Paris. — Imprimé par E. THUNOT et Cᵉ, 26, rue Racine.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES

POUTRES DROITES

PONTS MÉTALLIQUES

PONTS AMÉRICAINS, COMBLES.

PAR

M. ÉD. COLLIGNON

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES

PARIS

DUNOD, ÉDITEUR

SUCCESSEUR DE Vᵒʳ DALMONT

Précédement Carillian-Gœury et Vᵒʳ Dalmont

LIBRAIRE DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES.

Quai des Augustins, 49.

—

1865

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION. V

PREMIÈRE PARTIE

FORMULES GÉNÉRALES RELATIVES AUX POUTRES DROITES D'UNE OU DE PLUSIEURS TRAVÉES.

CHAPITRE I. Rappel des définitions et des formules fondamentales. . . . 1

CHAPITRE II. Détermination des efforts tranchants et des moments fléchissants dans une poutre droite posée sur deux appuis de niveau. 14

CHAPITRE III. Le théorème des trois moments. 24

§ 1. Exposé et démonstration du théorème. 24

§ 2. Résolution du système d'équations auquel il conduit. 29

§ 3. Construction géométrique des moments sur les appuis. 33

§ 4. Détermination directe d'un moment quelconque. 38

§ 5. Propriétés des nombres (α) et (γ). 41

§ 6. Formules approximatives. 45

§ 7. Efforts tranchants et réactions des appuis. 49

CHAPITRE IV. Recherches des hypothèses à faire sur la distribution des surcharges. 51

§ 1. Nombre total d'hypothèses distinctes. 51

§ 2. Théorème sur le maximum du moment fléchissant sur un appui déterminé. 57

§ 3. Recherche de l'influence de la charge d'une travée sur le moment fléchissant en un point quelconque de la poutre. 59

§ 4. Indication d'une méthode approximative plus rapide. 70

CHAPITRE V. Applications diverses. 70

§ 1. Calcul de moments fléchissants pour une poutre de cinq travées 70

§ 2. Vérifications. 75

§ 3. Construction de l'épure des moments fléchissants. 77

§ 4. Partage des travées en tronçons. 78

§ 5. Tableau du nombre d'hypothèses à faire pour l'étude d'une poutre continue de n travées. 80

§ 6. Observation sur les poutres continues. 81

§ 7. Calcul des efforts développés dans une toiture. 84

DEUXIÈME PARTIE

THÉORIE DES POUTRES MÉTALLIQUES EN TREILLIS ET DES POUTRES AMÉRICAINES.

INTRODUCTION. 1

CHAPITRE I. Formules générales de l'équilibre intérieur d'une poutre droite à treillis, posée sur deux appuis de niveau. 4

Pages.

CHAPITRE II. Discussion et application des formules. 11
CHAPITRE III. Flexion de la poutre à treillis. 19
CHAPITRE IV. Du poids par mètre courant et des limites des efforts dans le métal. 28
CHAPITRE V. Calcul de l'établissement des rivures. 37
CHAPITRE VI. Discussion d'une objection contre les poutres à treillis. . 40
CHAPITRE VII. Calcul des ponts américains du système de How. 45

TROISIÈME PARTIE

COMPLÉMENT.

CHAPITRE I. Comparaison entre les divers systèmes de ponts métalliques. 77
§ 1. Ponts en arc de cercle et ponts suspendus. 78
§ 2. Ponts à poutres droites. — Dispositions générales. 82
§ 3. Hauteur des fermes. 86
§ 4. Poutres pleines. — Treillis. — Mailles serrées ou mailles lâches. — Barres plates ou barres en fer spéciaux. — Treillis simples ou doubles. 89
§ 5. Bow-strings. 93
Tableau pour servir à la comparaison des divers systèmes de ponts métalliques. 95
CHAPITRE II. Usage de la formule qui donne le poids par mètre courant d'une poutre droite à treillis. 97
§ 1. Exemple numérique. 97
§ 2. Comparaison de divers projets de ponts destinés à franchir le même débouché total. 100
CHAPITRE III. § 1. Calculs de l'établissement d'une poutre à treillis pour une travée unique. — Tableau résumant ces calculs. . . . 102
§ 2. Pièces de ponts et longerons sous rail. 107
§ 3. Entretoisements et contreventements. 110
TABLES. 111
1, 2 et 3. Données pratiques relatives à la résistance du fer, de la fonte et du bois. 111
4. Sections de tôle : largeur pour une épaisseur donnée. 113
5. Cornières. 114
6. Rivets. 115
DOCUMENTS DIVERS. 116
Cahier des charges spécial pour la construction de ponts métalliques. 116
Modèle de soumission pour la construction de ponts métalliques. . . . 130
Modèle de soumission pour la construction de ponts de service destinés à établir une voie provisoire continue. 135
Métré du pont métallique de 60 mètres. 138

FIN DE LA TABLE.

INTRODUCTION.

L'ouvrage auquel nous donnons le titre de *Théorie élémentaire des poutres droites* se compose de trois parties.

La première contient, outre le rappel des définitions et des formules fondamentales, une étude détaillée du problème des poutres continues posées sur plusieurs appuis. Ce problème, qu'un ingénieur de chemin de fer est fréquemment appelé à traiter, a été regardé comme à peu près insoluble, par suite de la longueur des calculs, tant qu'on n'en a connu d'autre solution que celle que Navier indique. On le résout aujourd'hui par une méthode élégante et rapide, qui appartient presque enentier à M. Clapeyron. Nous avons fait rentrer dans cette partie une seconde édition de la brochure que nous avions publiée sur le même sujet, à Pétersbourg, en 1860 (*).

La seconde partie est l'extrait d'un mémoire inséré

(*) V. sur l'histoire de cette question, les *Annales des Ponts et Chaussées*, année 1860, Novembre et Décembre, chronique, p. 405.

dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, sur la *Théorie des treillis et des fermes américaines* (*).

La troisième partie est en quelque sorte le complément pratique des deux premières. Elle comprend :

Une comparaison des types métalliques les plus connus;

Des exemples propres à éclaircir l'emploi des formules trouvées dans les parties précédentes, et notamment d'une formule de la seconde partie, conduisant *à priori* à fixer approximativement le poids propre d'une poutre droite dont on donne la portée et la surcharge;

Des tableaux où sont groupés divers renseignements utiles;

Les dessins d'un projet de pont en treillis,

Et enfin des modèles de soumissions et de cahiers des charges.

(*) Année 1864, mars et avril, p. 141.

FORMULES GÉNÉRALES

RELATIVES

AUX POUTRES DROITES

D'UNE OU DE PLUSIEURS TRAVÉES.

CHAPITRE PREMIER.

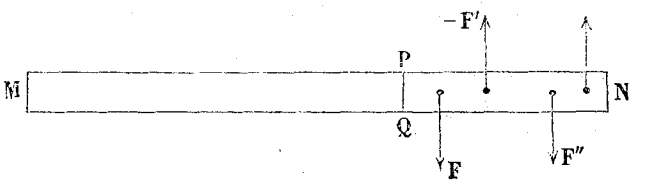
RAPPEL DES DÉFINITIONS ET DES FORMULES FONDAMENTALES.

Pièces prismatiques.

Les différentes pièces qui entrent dans la composition d'un ouvrage métallique sont ordinairement assimilables à des prismes droits, symétriques par rapport à un plan moyen, et elles sont sollicitées par des forces situées dans ce plan et normales à la direction de ces pièces. Dans certains cas, il est nécessaire de prévoir l'action de forces obliques agissant toujours dans le plan de symétrie. Enfin on est souvent conduit à altérer d'un point à l'autre les hauteurs ou les sections des pièces ou de leurs éléments constitutifs, pour donner à toutes les parties de la construction une résistance à peu près égale. On obtient ainsi un solide qui n'est plus un prisme géométrique : le nom de *pièce prismatique* continue néanmoins à être employé pour désigner une pièce de cette nature, et signifie seulement *une pièce droite ou légèrement courbée, dont les dimensions transversales sont petites par rapport à la longueur.*

Effort tranchant, Moment fléchissant, Moment d'élasticité.

Considérons une pièce prismatique MN, en équilibre sous l'action de forces normales données de grandeur et de position. Coupons-la par un plan PQ perpendiculaire à sa longueur.



Le plan PQ partage la pièce en deux tronçons qui sont en équilibre chacun sous l'action des forces extérieures qui y sont spécialement appliquées et des forces moléculaires développées dans la section PQ. Ces forces moléculaires font donc équilibre aux forces extérieures qui sollicitent l'un quelconque des deux tronçons.

Prenons en particulier le tronçon PQN; soient F, F', F'' les forces normales qui agissent sur lui; soient de plus f, f', f'' les distances de ces forces à la section PQ ou les bras de levier de ces forces par rapport à un point quelconque de cette section. Les forces moléculaires dans le plan PQ se réduisent donc pour l'équilibre :

1° à une force A, égale et opposée à la somme algébrique $F + F' + F'' + \ldots$

2° à un couple M, égal et opposé à la somme des moments $Ff + F'f' + F''f'' + \ldots$ Cela posé, on appelle :

Effort tranchant dans la section PQ, la résultante $F + F' + F'' + \ldots$ des forces qui tendent à faire glisser la portion PQN sur la portion PQM, en cisaillant la pièce suivant le plan PQ;

Résistance à l'effort tranchant la force moléculaire A, égale et contraire à l'effort tranchant;

Moment fléchissant ou *moment de rupture*, le couple résultant $Ff + F'f' + F''f'' + \ldots$ des moments des forces extérieures qui tendent à courber la pièce dans la section PQ;

Moment d'élasticité, le couple résultant M des actions

moléculaires développées dans la section PQ, égal et opposé au moment fléchissant.

Lorsqu'une pièce MN est sollicitée par des forces obliques, situées dans son plan moyen, on peut décomposer chacune de ces forces suivant deux directions, l'une normale, l'autre parallèle à la pièce ; les composantes normales s'ajoutent ensemble pour donner l'*effort tranchant;* les composantes parallèles ajoutées donnent un *effort d'extension ou de compression*, enfin le *moment fléchissant* est toujours égal au couple résultant des moments des forces extérieures.

Pièce droite tirée ou comprimée dans le sens de sa longueur.

L'expérience conduit à admettre que quand une pièce droite est tirée dans le sens de sa longueur par une force P également répartie sur toute la section transversale, L étant la longueur de la pièce dans son état naturel, l l'allongement très-petit produit par la traction P, ω la section droite et E une constante spécifique relative à la matière dont est composée la pièce, on a la relation $P = \frac{El\omega}{L}$.

Cette même formule exprime aussi la relation qui lie une force P de compression et le raccourcissement l qui résulte de l'action de cette force quand la pièce comprimée ne fléchit pas latéralement. On convient en conséquence d'attribuer à P et à l les signes + et —, pour distinguer dans le calcul les tractions des compressions et les allongements des raccourcissements. La formule devient alors générale : c'est le point de départ de toute la théorie de la flexion des prismes.

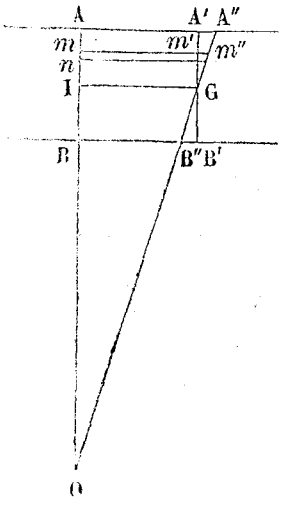
$\frac{P}{\omega}$ est la tension de la matière par unité de surface dans une section quelconque du prisme ; $\frac{l}{L}$ est l'allongement relatif du prisme ; c'est un nombre. La constante spécifique E

exprime une force rapportée à l'unité de surface. C'est la force fictive d'extension qui doublerait la longueur d'un prisme ayant pour section l'unité de surface, si la formule se vérifiait pour tout allongement quelque grand qu'il fût; E représente aussi la force fictive de compression qui réduirait à zéro la longueur d'une tige ayant pour section l'unité de surface.

Pour le fer, si l'on prend pour unité de surface le mètre carré et pour unité de force le kilogramme, E varie de 18 à 22 000 000 000 et est en moyenne égal à 20 000 000 000 ou à 2×10^{10}.

Expressions diverses du moment d'élasticité.

Soient AB, A'B', deux sections transversales infiniment voisines faites dans la pièce et parallèles dans l'état naturel. Après la déformation du prisme, on peut concevoir que la position nouvelle de la section AB est ramenée à coïncider avec sa position primitive, et alors les molécules de la section A'B' prennent une certaine position A''B'', différente de A'B', mais on suppose qu'elles ne cessent pas d'appartenir à un plan perpendiculaire au plan de symétrie. Ces deux plans A''B'' et A'B' se coupent suivant une droite projetée en G.



Considérons le prisme élémentaire ayant pour base l'élément de section projeté en *mn* dans la section AB; ce prisme avait avant la déformation la longueur *mm'*; après la déformation sa longueur devient *mm''*. Désignant donc par ω la section de la base projetée en *mn*, l'extension du prisme élémentaire représente une tension égale à $\frac{E\omega \times m'm''}{mm'}$.

Ce sont toutes les forces analogues qui doivent se réduire

à un couple, dont le moment soit égal au moment d'élasticité de la pièce dans la section AB.

Pour cela, il faut et il suffit que la somme algébrique de toutes ces forces parallèles soit égale à zéro, ce que l'on exprime en posant :

$$\sum \frac{E\omega \times m'm''}{mm'} = 0.$$

La somme $\sum$ doit être étendue à toute la section A'B'. Cette équation se réduit à $\sum (\omega \times m'm'') = 0$ en faisant sortir du signe $\sum$ les facteurs constants E et $\frac{1}{mm'}$.

Mais dans les triangles $Gm'm''$, $m'm''$ est proportionnel à Gm' ; de sorte que l'équation précédente revient à celle-ci :

$$\sum (\omega \times Gm') = 0 ;$$

cette équation indique que le centre de gravité de la section A'B' se projette au point G sur le plan de symétrie. La fibre IG, qui passe par ce point, ne change pas de longueur : c'est la *fibre neutre*. L'*axe neutre* d'une pièce droite sollicitée par des forces normales est le lieu géométrique des centres de gravité des sections tranversales.

Le moment d'élasticité est égal à la somme des moments des forces $\frac{E\omega \times m'm''}{mm'}$ par rapport à la droite projetée en G : nous aurons donc à faire la somme :

$$\sum \left(\frac{E\omega \times m'm''}{mm'} \times Gm' \right),$$

en l'étendant à tous les éléments de la section A'B'.

Prolongeons le plan A''B'' jusqu'à la rencontre du plan AB en O. Les triangles semblables OIG, $Gm'm''$ donnent la proportion :

$$m'm'' : Gm' :: IG = mm' : OI.$$

Donc

$$\frac{m'm'' \times Gm'}{mm'} = \frac{\overline{Gm'}^2}{OI}.$$

et le moment d'élasticité est par conséquent égal à $\frac{E}{OI}\sum(\omega \times Gm'^2)$.

La somme $\sum(\omega \times Gm'^2)$ est le *moment d'inertie* de la section A'B' ou de la section AB, par rapport à la droite menée par le centre de gravité de cette section perpendiculairement au plan de symétrie. Nous le représenterons par la lettre I.

Le point O, point de rencontre des deux normales AB, A''B'' à l'axe neutre après la flexion, est le centre de courbure de cette ligne. Le dénominateur OI est donc le rayon de courbure ρ de l'axe neutre déformé.

La première expression du moment d'élasticité est $\frac{EI}{\rho}$.

M étant le moment fléchissant dû aux forces extérieures qui agissent sur le prisme entre la section considérée et l'une des extrémités de la pièce, l'équation

$$\frac{EI}{\rho} = M$$

représente la courbe affectée par l'axe neutre après la déformation. On admet que la déformation est assez petite pour ne pas altérer sensiblement les positions des forces extérieures.

Si l'on prend l'axe neutre avant la déformation pour axe des abscisses et que y représente l'ordonnée après la déformation du point de l'axe neutre défini par son abscisse x, on sait qu'on aura pour le rayon de courbure :

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Or la petitesse des déformations permet de négliger $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ vis-à-vis de l'unité; on a donc approximativement :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

et par suite $EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$ est l'équation de l'axe neutre déformé. M a le même signe que ρ; conformément aux conventions admises dans l'analyse, nous regarderons le moment fléchissant comme positif en un point donné lorsque le centre de courbure de la pièce en ce point sera au-dessus de la pièce, et comme négatif quand il sera au-dessous.

Proposons-nous enfin de trouver en un point m de la section AB la tension ou la compression de la matière. Pour y parvenir, posons $Gm' = v$, et appelons R la tension par unité de surface telle qu'elle existe dans la fibre mm'.

Nous aurons, en divisant la force $\frac{E\omega \times m'm''}{mm'}$ par la section élémentaire ω,

$$R = \frac{E \times m'm''}{mm'} = \frac{E \times Gm'}{OI} = \frac{Ev}{\rho}.$$

Donc $\frac{R}{v} = \frac{E}{\rho}$, et par suite $\frac{EI}{\rho}$, moment d'élasticité, est aussi représenté par $\frac{RI}{v}$. C'est la troisième expression du moment d'élasticité, et c'est une expression rigoureuse.

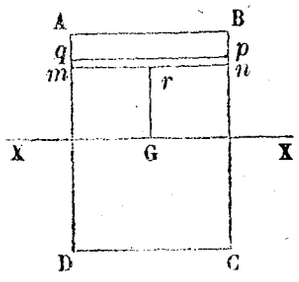
En résumé on a la série d'équations

$$\frac{EI}{\rho} = EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{RI}{v} = M.$$

La dernière $\frac{RI}{v} = M$ donnera la charge R par unité de surface en un point pris arbitrairement dans une section quelconque. En attribuant à v la plus grande valeur absolue qu'il puisse avoir, on trouvera pour R la plus grande charge à laquelle la matière soit soumise dans la section considérée.

Calcul du moment d'inertie I *d'une section par rapport à une droite menée par son centre de gravité.*

Rectangle plein. Le rectangle ABCD étant donné, le centre de gravité de la figure est le point G de rencontre des deux diagonales ; par ce point menons une droite XX, parallèle aux côtés AB, CD, et proposons-nous de trouver le moment d'inertie I de la section par rapport à cette droite. Soit $AB = a$, $AD = b$.



Considérons un rectangle infiniment petit *mnpq* et appelons x la distance G*r* du côté *mn* de ce rectangle au centre de gravité G ; la hauteur *mq* du rectangle élémentaire sera représentée par dx, et son moment d'inertie par rapport à XX sera égal à $adx \times x^2$. Le moment d'inertie total I est la somme des éléments ax^2dx étendue à toute la section ABCD, c'est-à-dire prise entre les limites $x = -\frac{b}{2}$ et $x = +\frac{b}{2}$; ce qui donne en définitive $\frac{ab^3}{12}$.

On a donc :

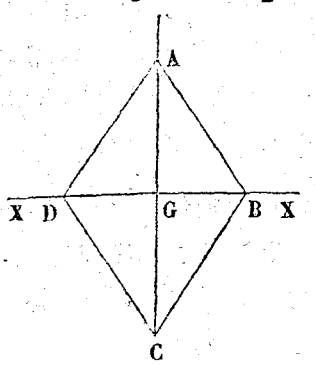
$$I = \frac{1}{12} ab^3.$$

Le maximum de v dans la section rectangulaire ABCD est égal à $\frac{b}{2}$, de sorte que la valeur minimum de $\frac{I}{v}$ est égale à $\frac{1}{6}ab^2$.

La formule $I = \frac{1}{12} ab^3$ peut se mettre sous la forme $I = ab \times \frac{1}{12} b^2$. Or ab est l'aire ω du rectangle ABCD ; $\frac{1}{12} b^2$ est le carré d'une longueur, $\frac{1}{2\sqrt{3}} b$, qui a reçu le nom

de *rayon de gyration* de la surface considérée. En général le moment d'inertie I d'une section est le produit de l'aire de cette section par le carré de son rayon de gyration.

Losange. Proposons-nous aussi de trouver le moment d'inertie de la surface ABCD par rapport à la diagonale BD, qui contient le centre de gravité G. Soit DB $= a$, AC $= b$.



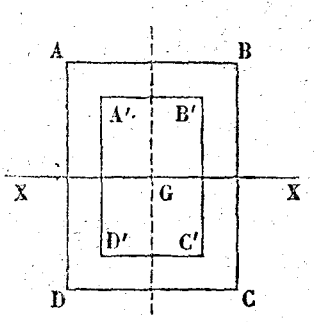
En suivant une méthode analogue, on trouvera $I = \frac{1}{48} ab^3$.

La section ω est ici égale à $\frac{1}{2} ab$; le carré du rayon de gyration est donc :

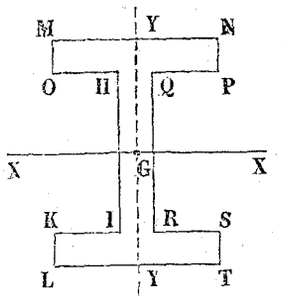
$$\frac{\frac{1}{48} ab^3}{\frac{1}{2} ab} = \frac{1}{24} b^2,$$ et le rayon de gyration $\frac{1}{2\sqrt{6}} b$.

Le maximum de v est $\frac{b}{2}$ et le minimum de $\frac{I}{v}$, par conséquent est égal à $\frac{1}{24} ab^2$.

Rectangle évidé ou *double* T. Le moment I de la section comprise entre les deux rectangles ABCD, A'B'C'D', dont les côtés sont parallèles et dont les centres de gravité coïncident au point G, s'obtient en retranchant du moment d'inertie relatif au premier rectangle, le moment d'inertie relatif au second.



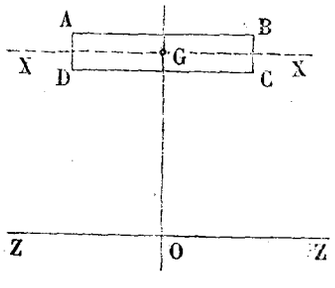
Soit donc AB $= a$, BC $= b$, A'B' $= a'$, B'C' $= b'$; nous aurons $I = \frac{1}{12} (ab^3 - a'b'^3)$.



Le maximum de v est égal à $\frac{1}{2}b$.

La même formule donne le moment d'inertie de la section double T qui se rencontre si souvent dans les constructions en tôle; on voit, en effet, que si l'on coupe la figure MNPQRSTLKIHO par la droite YY qui la partage en deux portions égales, on peut transporter la portion située à droite de cette ligne YY de manière qu'elle se joigne en MO et KL, par les côtés NP et ST, avec la portion de gauche. On forme ainsi un rectangle évidé, sans altérer ni les éléments de la section ni leurs distances à l'axe XX des moments d'inertie; le moment cherché I n'est donc pas altéré. La formule $I = \frac{1}{12}(ab^3 - a'b'^3)$ donne donc le moment d'inertie de la section double T, si l'on pose $a = MN$, $b = ML$, $a' = PQ + OH$ et $b' = HI$.

Moment d'inertie du rectangle ABCD, *par rapport à une droite* ZZ *parallèle au côté* AB, *mais ne passant pas par le centre de gravité* G *du rectangle.*



Soit $AB = a$, $BC = b$, enfin $GO = h$. Nous aurons à prendre la somme des éléments ax^2dx entre les limites $h - \frac{b}{2}$ et $h + \frac{b}{2}$, ce qui donnera :

$$I = \frac{1}{3}a\left[\left(h+\frac{b}{2}\right)^3 - \left(h-\frac{b}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{3}a\left(3bh^2 + \frac{b^3}{4}\right)$$

$$= ab \times h^2 + \frac{1}{12}ab^3.$$

Le moment d'inertie I, par rapport à ZZ, se compose donc de deux parties : l'une, $ab \times h^2$, est le produit de l'aire

de la figure ABCD par le carré h^2 de la distance à la droite ZZ du centre de gravité G de cette figure ; l'autre, $\frac{1}{12} ab^3$, n'est autre chose que le moment d'inertie de la figure par rapport à une droite XX menée parallèlement à ZZ par le centre de gravité G.

Cette loi est générale pour une figure quelconque.

Il arrive fréquemment que, dans les sections des poutres en tôle, l'épaisseur b d'une feuille soit très-petite par rapport à la distance h du centre de gravité de la feuille à l'axe neutre. Alors on peut supprimer le terme $\frac{1}{12} ab^3$ dans la valeur de I et poser par approximation :

$$I = ab \times h^2.$$

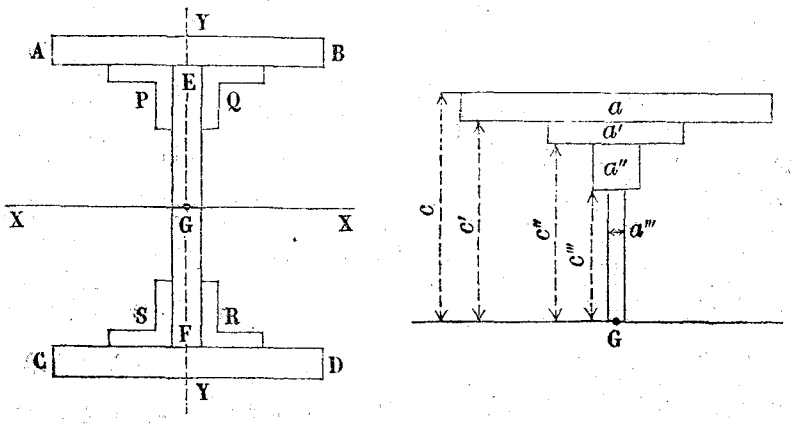
Cela revient à prendre pour rayon de gyration de la section par rapport à ZZ la quantité h au lieu de $\sqrt{h^2 + \frac{1}{12} b^2}$.

Méthodes générales pour la détermination du moment d'inertie I *d'une section de poutre en tôle.*

1° *Méthode exacte applicable aux petites poutres.*

Les poutres en tôle sont en général composées comme il suit :

Les deux *tables* ou *semelles* AB, CD sont réunies à une



âme EF au moyen des quatre cornières P, Q, R, S, et la

section est symétrique à la fois par rapport aux deux droites rectangulaires XX, YY, passant par son centre de gravité G.

On n'a alors à s'occuper que d'une moitié de la section, celle qui est située au-dessus de XX, par exemple, sauf à doubler ensuite le résultat.

On trouvera la formule :

$$I = \frac{2}{3}[a(c^3 - c'^3) + a'(c'^3 - c''^3) + a''(c''^3 - c'''^3) + a'''c'''^3]$$

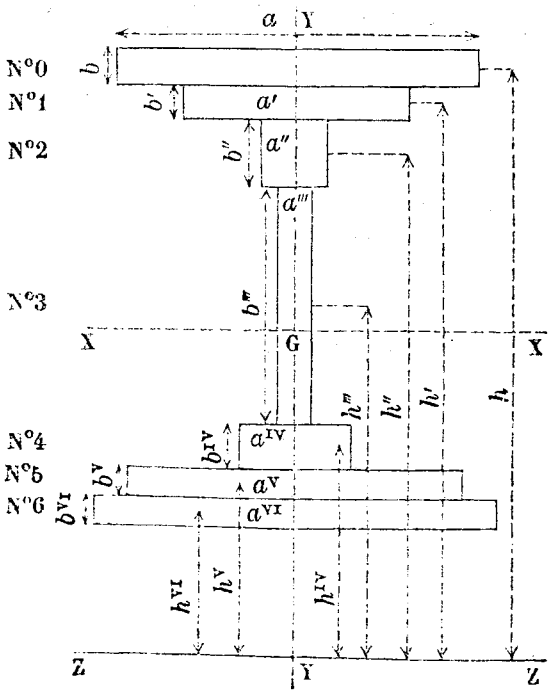
ou bien :

$$I = \frac{2}{3}[ac^3 - (a - a')c'^3 - (a' - a'')c''^3 - (a'' - a''')c'''^3].$$

Cette formule s'emploie pour le calcul des moments d'inertie des poutres de faible hauteur. L'usage des tables de cubes en simplifie l'application.

2° *Méthode approximative pour les sections des grandes poutres.*

Nous supposerons, pour plus de généralité, que la section n'est pas symétrique par rapport à la droite XX menée par son centre de gravité, de sorte que la position du centre de gravité n'est pas connue d'avance.



On prendra une droite ZZ, perpendiculaire au plan de symétrie YY, pour axe provisoire des moments. On mesurera sur l'épure de la section toutes les dimensions a, b, a', b'... des rectangles élémentaires dans lesquels la section se dé-

compose, et les distances h, h'... des centres de gravité de ces rectangles à la droite ZZ.

Au moyen de ces données, on formera le tableau suivant :

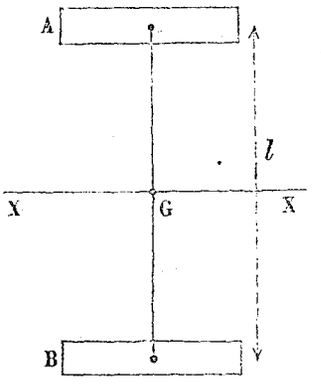
DÉSIGNATION des rectangles.	AIRES des rectangles.	MOMENTS des aires par rapport à ZZ.	VALEUR approximative du moment d'inertie des aires partielles.
N° 0	$a \times b$	$ab \times h$	$abh \times h$
1	$a' \times b'$	$a'b' \times h'$	$a'b'h' \times h'$
2	$a'' \times b''$	$a''b'' \times h''$	$a''b''h'' \times h''$
3	$a''' \times b'''$	$a'''b''' \times h'''$	$a'''b'''h''' \times h'''$
4	$a^{IV} \times b^{IV}$	$a^{IV}b^{IV} \times h^{IV}$	$a^{IV}b^{IV}h^{IV} \times h^{IV}$
5	$a^{V} \times b^{V}$	$a^{V}b^{V} \times h^{V}$	$a^{V}b^{V}h^{V} \times h^{V}$
6	$a^{VI} \times b^{VI}$	$a^{VI}b^{VI} \times h^{VI}$	$a^{VI}b^{VI}h^{VI} \times h^{VI}$
Totaux...	Ω	S	T

On divisera la somme S des moments des aires par la somme Ω qui représente l'aire totale de la section ; le quotient H sera la distance à la droite ZZ du centre de gravité G de la section. La somme T est, approximativement, le moment d'inertie par rapport à ZZ; pour en déduire le moment d'inertie I par rapport à la droite XX menée parallèlement à ZZ par le point G, il faudra retrancher de T le produit de l'aire totale Ω par le carré de la distance H, ce qui revient à retrancher de T le produit SH. On a donc à faire la série d'opérations :

$$H = \frac{S}{\Omega}, \quad I = T - \Omega H^2 = T - SH.$$

Cette méthode donne pour I une valeur un peu au-dessous de la valeur exacte.

3° Méthode simplifiée pour les grandes sections symétriques par rapport à la droite XX.



On néglige le moment d'inertie de l'âme; on ajoute la section des cornières à la section de la table voisine; soit ω la section résultante, et l la distance du centre de gravité de la table supérieure A au centre de gravité de la table inférieure B. On a avec une approximation généralement suffisante :

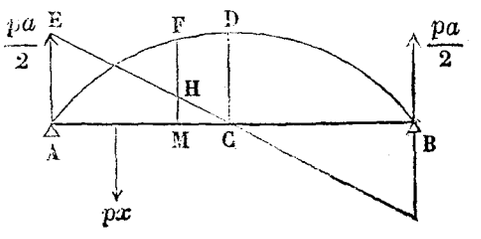
$$I = \frac{1}{2}\,\omega\, l^2.$$

Dans ce cas, on peut prendre aussi pour valeur maximum de v la quantité $\frac{l}{2}$, de sorte que $\frac{I}{v}$ a pour valeur minimum ωl. Le moment d'élasticité a pour expression $R\omega l$, ce qui est évident, puisque $R\omega$ représente la somme des forces moléculaires développées en sens différents dans chacune des sections A et B, et l le bras de levier du couple formé par ces deux groupes de forces.

CHAPITRE II.

DÉTERMINATION DES EFFORTS TRANCHANTS ET DES MOMENTS FLÉCHISSANTS DANS UNE POUTRE DROITE POSÉE SUR DEUX APPUIS DE NIVEAU.

Les forces extérieures qui agissent sur la poutre sont les poids donnés qui y sont appliqués, et les réactions des appuis.



1^er^ *Cas.* Les poids donnés se réduisent à une charge également répartie sur la longueur de la pièce.

Soit AB la poutre, A et B les appuis, a la distance AB,

soit enfin p le poids uniformément réparti par unité de longueur.

Les réactions des appuis seront verticales et égales à $\frac{pa}{2}$.

Prenons le point A pour origine et AB pour axe des abscisses ; puis considérons un point M défini par son abscisse $AM = x$. Le moment fléchissant M des forces extérieures agissant sur la pièce entre la section M et l'une des extrémités A sera égal à la différence :

$$\frac{pa}{2} \times x - px \times \frac{x}{2} = \frac{1}{2} p(ax - x^2) = M.$$

L'effort tranchant A dans la section M est égal à la différence :

$$\frac{pa}{2} - px = A.$$

On reconnaît sur-le-champ :

1° Que le moment fléchissant M est proportionnel à l'ordonnée d'une parabole dont l'équation serait :

$$my = \frac{1}{2} p(ax - x^2),$$

le facteur m étant introduit pour rendre l'équation homogène et dépendant seulement du choix de l'échelle des hauteurs ;

Que M est nul au point A et au point B pour $x = 0$ et pour $x = a$, et qu'il est maximum au point C, milieu de la portée, pour $x = \frac{a}{2}$; il est alors égal à $\frac{1}{8} pa^2$;

2° Que l'effort tranchant A est proportionnel à l'ordonnée d'une droite représentée par l'équation

$$ny = \frac{pa}{2} - px.$$

n étant de même un facteur dépendant du choix de l'échelle des hauteurs ;

Que A est nul au point C, positif dans la région CA et négatif dans la région CB, et acquiert sa valeur absolue maximum aux deux points A et B; il est alors égal à $\pm\frac{pa}{2}$.

Si l'on compare les deux équations :

$$M = \frac{1}{2} p(ax - x^2),$$

$$A = \frac{1}{2} pa - px,$$

on reconnaît que $A = \frac{dM}{dx}$; c'est-à-dire que l'effort tranchant est la dérivée du moment fléchissant par rapport à l'abscisse.

La parabole ADB, qui passe par les points A et B et qu a pour axe la verticale CD menée par le milieu C de la portée, représente par ses ordonnées les valeurs du moment fléchissant en un point donné M. Si l'ordonnée maximum CD représente le moment de rupture maximum, $\frac{1}{8} pa^2$, l'ordonnée MF, élevée au point M, représentera à la même échelle le moment fléchissant en M. Si l'on prend de même à une échelle arbitraire $AE = \frac{pa}{2}$, et qu'on joigne EC, l'ordonnée MH représentera, à cette seconde échelle, la valeur de l'effort tranchant au point M.

Il est facile de trouver la charge de la matière par unité de surface dans une section M quelconque.

Soit ω l'aire totale de la section;

I, le moment d'inertie de la section par rapport à une horizontale menée dans son plan par son centre de gravité;

R, la charge par unité de surface en un point de la section défini par sa distance v à la fibre neutre;

R', la résistance à l'effort tranchant par unité de surface.

On a en un point quelconque :

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{RI}{v} \\ A &= R'\omega \end{aligned}\right\} \quad \text{d'où l'on tire} \quad \begin{cases} R = \dfrac{Mv}{I}, \\ R' = \dfrac{A}{\omega}. \end{cases}$$

Si l'on cherche au contraire la forme de l'axe neutre après la déformation, on posera :

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = M = \frac{1}{2}p\,(ax - x^2),$$

d'où l'on tire, en intégrant deux fois,

$$EI\left(\frac{dy}{dx} - \operatorname{tang}\varphi\right) = \frac{1}{4}pax^2 - \frac{1}{6}px^3,$$

$$EI\,(y - x\operatorname{tang}\varphi) = \frac{1}{12}pax^3 - \frac{1}{24}px^4,$$

et l'on déterminera la valeur de la constante tg φ en observant que pour $x = \frac{a}{2}$, on doit avoir $\frac{dy}{dx} = 0$; ce qui donne

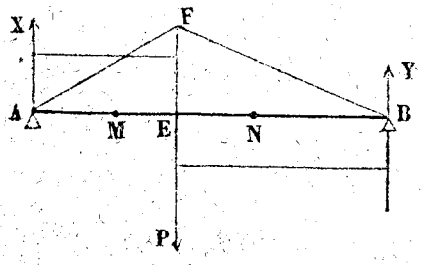
$\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{\frac{1}{24}pa^3}{EI}$. L'angle φ est l'angle que fait au point A avec l'horizon l'axe neutre déformé.

Substituant cette valeur dans la dernière équation, et faisant $x = \frac{a}{2}$, on a pour y :

$$y = -\frac{pa^3}{EI} \times \frac{5}{384}\,a.$$

La valeur absolue de y est la flèche prise par la poutre.

2e *Cas.* Pièce posée sur deux appuis et sollicitée par un poids unique P donné de position et de grandeur.



Soit $AB = a$, $AE = b$; et par suite,

$$BE = a - b.$$

La réaction X au point A sera déterminée par l'équation des moments autour du point B ; on aura :

$$X \times a = P \times (a - b) \quad \text{donc} \quad X = \frac{P(a-b)}{a},$$

$$\text{et de même} \quad Y = \frac{Pb}{a}.$$

Du point A au point E, le moment fléchissant en un point M quelconque est égal à Xx ou à $\frac{P(a-b)}{a}x$, x étant la distance variable AM. Du point E au point B, le moment fléchissant en un point N est représenté par $Xx - P(x-b) = \frac{P(a-b)x}{a} - P(x-b)$, x étant encore l'abscisse AN du point N.

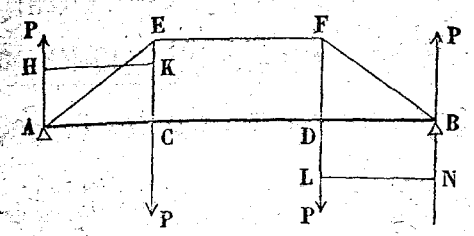
Donc le moment fléchissant M varie du point A au point E proportionnellement aux ordonnées d'une droite AF, dont la plus grande ordonnée, EF, représente la valeur $\frac{P(a-b)b}{a}$ du moment fléchissant pour $x = b$. De E en B, le moment fléchissant est représenté par les ordonnées de la droite FB.

L'effort tranchant entre A et F est partout égal à $X = \frac{P(a-b)}{a}$, et entre E et B, partout égal à $-Y$ ou à $-\frac{Pb}{a}$; la différence de ces deux valeurs est égale à P, et chacune d'elles est la dérivée des valeurs correspondantes de M prise par rapport à l'abscisse.

Si, au lieu d'un poids P unique, il y en avait plusieurs, on pourrait suivre une marche analogue et tracer le polygone des moments fléchissants ; on peut aussi traiter séparément la question pour chacun des poids, et composer ensuite par voie d'addition algébrique les ordonnées obtenues pour chacun.

Prenons pour exemple le cas particulier d'une poutre

AB posée sur deux appuis A et B, et supportant deux poids égaux P, P en des points C et D également distants des extrémités de la pièce.



Les réactions des appuis seront égales à P.

Soit AB = a et AC = b.

On aura donc, en prenant AB pour axe des x et A pour origine :

de A en C : $M = Px$ et $A = P$,

de C en D : $M = Px - P(x-b) = Pb$ et $A = P - P = o$,

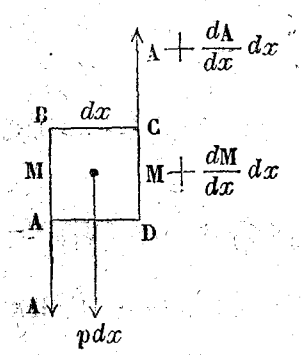
de D en B : $M = Px - P(x-b) - P[x-(a-b)] = P(a-x)$,

et $A = P - P - P = -P$.

Prenant donc sur la verticale du point C une longueur $CE = Pb$ et une longueur égale DF, sur la verticale du point D, on obtient, en joignant AE, EF, FB, le polygone dont les ordonnées représentent les moments fléchissants aux différents points de la portée.

De même si l'on mène une droite HK parallèle à AB, à une distance $AH = P$, et, au-dessous de AB, une droite LN parallèle à AB et à une distance de AB égale aussi à P, les ordonnées du contour discontinu HK, CD, LN, donneront en chaque point de la portée la valeur de l'effort tranchant.

On peut vérifier sur ces deux exemples que l'effort tranchant A est toujours la dérivée du moment fléchissant M par rapport à l'abscisse. Cette relation est un fait général, quelle que soit la distribution des forces.



Pour le démontrer, il suffit de considérer isolément un élément de longueur dx de la poutre; cet élément est en équilibre sous l'action de son poids pdx, des efforts tranchants sur les deux faces AB, CD, et des moments de rupture dans ces deux sec-

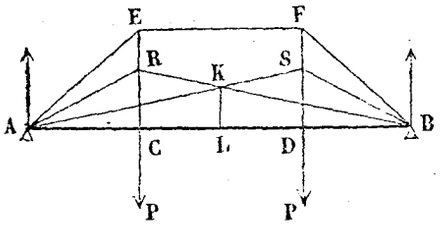
tions; or soit A l'effort tranchant dans le plan AB, et M le moment fléchissant dans ce même plan; l'effort tranchant et le moment dans le plan CD seront égaux à $A + \frac{dA}{dx} dx$ et à $M + \frac{dM}{dx} dx$, changés de signe; car les forces qui agissent en CD sur l'élément ABCD qui précède la section, sont contraires aux forces qui agissent en AB sur le même élément ABCD qui la suit. Prenant les moments par rapport à un point quelconque de la section CD, l'effort tranchant dans cette section disparaît parce qu'il a un moment nul, et il vient :

$$\left(M + \frac{dM}{dx} dx\right) - M - A\,dx - p\,dx \times \frac{dx}{2} = 0.$$

Réduisant, supprimant le terme infiniment petit du second ordre, et divisant par dx, on a en définitive :

$$\frac{dM}{dx} = A.$$

Revenons à notre problème, et considérons successivement les deux poids P, P, pour composer ensuite les résultats partiels obtenus.



Considérons d'abord celui des deux poids P qui est appliqué au point C; les réactions des appuis qui y correspondent sont $P \times \frac{a-b}{a}$ en A, et $P \times \frac{b}{a}$ en B; et si l'on porte sur la verticale CE une longueur $CR = P\frac{a-b}{a} \times b$, le contour polygonal représentatif des moments fléchissants sera formé des deux droites AR, BR.

La force P appliquée en D, considérée isolément, don-

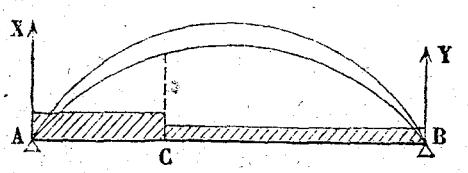
nera de même un polygone des moments formé des deux droites AS, SB, qui se coupent sur la verticale du point D, à la distance DS = CR; car il y a symétrie de la poutre et des forces par rapport au plan qui la coupe en deux parties égales.

Il suffit alors de composer par voie d'addition les ordonnées qui correspondent à une même abscisse, ce qui donnera le contour polygonal AEFB, que nous avons déjà obtenu. L'ordonnée CE, qui s'applique sans variation à tous les points compris entre C et D, est double de l'ordonnée IK commune aux deux contours partiels. Or

IK : CR :: BI : BC ou bien $IK = \left(\frac{P\frac{a-b}{a} b \times \frac{a}{2}}{a-b} \right) = \frac{Pb}{2}$. Donc

CE, double de IK, est égal à Pb, ce que nous avions trouvé directement.

3e *Cas.* Les poids qui agissent sur la poutre se réduisent à une charge p également répartie par unité de longueur sur la portion AC, et à une charge p' également répartie par unité de longueur sur le reste CB de la portée.



Soit AB = a et AC = b.

Le théorème des moments donne encore les réactions des appuis. On a en effet, en prenant les moments par rapport au point B :

$$X \times a = pb \times \left(a - \frac{1}{2} b\right) + p'(a-b) \times \frac{a-b}{2},$$

puis en les prenant par rapport au point A :

$$Y \times a = pb \times \frac{b}{2} + p'(a-b) \times \frac{a+b}{2}.$$

Le moment de rupture M est donc donné entre les points

A et C par l'équation :

$$M = Xx - \frac{1}{2} px^2,$$

et entre C et B par l'autre équation :

$$M = Xx - pb \times \left(x - \frac{1}{2} b\right) - p'(x-b)\frac{x-b}{2}.$$

Ces équations représentent deux paraboles à axes verticaux dont les paramètres sont égaux à $\frac{2}{p}$ pour la première et $\frac{2}{p'}$ pour la seconde. Elles ont un point commun pour $x = b$.

L'effort tranchant sera donné par les équations :

$$A = X - px, \quad \text{entre A et C,}$$
$$\text{et } A = X - pb - p'(x-b) \quad \text{entre C et B,}$$

ces équations représentent deux droites.

Il est facile de reconnaître que, si p est plus grand que p', le moment fléchissant M, donné par les équations que nous venons de poser, est en tous points inférieur à la valeur $\frac{1}{2} p(ax - x^2)$ qu'il aurait si la charge p était répandue sur toute la portée; et comme ce qu'on cherche avant tout, ce sont les limites extrêmes des efforts subis par la matière, on voit qu'il est inutile pour cette recherche de considérer les charges incomplétement réparties dans la portée.

Il n'en est pas de même des efforts tranchants; car si la charge p est répartie sur toute la portée, l'effort tranchant A est nul au milieu de la poutre, tandis qu'il a en ce point une valeur différente de zéro lorsque la charge p n'est appliquée qu'à la longueur b moindre que a.

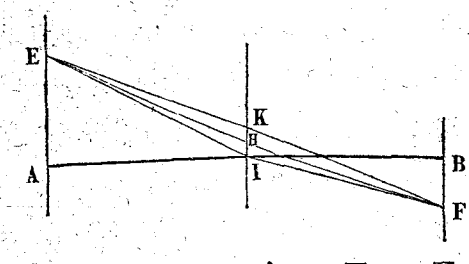
Pour prévoir tous les cas possibles de distribution des efforts tranchants, il faut faire varier b de o à a, et imaginer que l'on construise la série des contours polygonaux

formés, pour chaque valeur de b, des deux droites :

$$A = X - px, \quad \text{entre} \quad A \text{ et } C,$$
$$\text{et } A = X - pb - p'(x - b) \quad \text{entre} \quad C \text{ et } B.$$

Le sommet de l'angle de ces deux droites décrit une parabole lorsqu'on fait varier le point C.

Sur la verticale AE, prenons $AE = \frac{pa}{2}$, réaction de l'appui A lorsque la plus grande charge p s'applique à toute la portée; sur la verticale BF prenons en sens contraire $BF = \frac{p'a}{2}$.



Joignons les points E et F au point I, milieu de AB. La courbe-limite des efforts tranchants maxima sera une parabole à axe vertical EHF, tangente en E à la droite IE, et en F à la droite IF; on aura l'ordonnée IH de la parabole au milieu I de la portée, en menant la droite EF qui coupe au point K la verticale du point I, et en prenant $IH = \frac{1}{2} IK$.

IH représentera la valeur maximum de l'effort tranchant au milieu de la portée; elle est toujours égale à $\frac{AE - BF}{4}$ ou à $\frac{(p - p')a}{8}$, p étant la plus grande charge par unité de longueur à laquelle la poutre puisse être soumise et p' la plus petite; on en aura donc à coup sûr une limite supérieure si dans cette expression on pose $p' = 0$, ce qui rend l'effort tranchant maximum au centre de la portée égal à $\frac{pa}{8}$, ou au quart de l'effort tranchant maximum, $\frac{pa}{2}$, sur l'appui.

On trouvera dans la seconde partie, page 12, le détail du calcul de cette courbe.

CHAPITRE III.

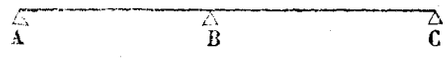
LE THÉORÈME DES TROIS MOMENTS.

---

§ 1. *Exposé et démonstration du théorème.*

Lorsqu'une poutre droite sollicitée par des forces parallèles porte sur plus de deux appuis, les deux équations que donne la statique ne suffisent plus pour faire connaître les réactions des appuis, lesquelles dépendent de la flexion de la poutre. On détermine facilement cette flexion, et par suite les réactions des appuis, au moyen du *théorème des trois moments*, qui peut s'énoncer comme il suit :

Si l'on considère trois appuis consécutifs A, B, C, *et qu'on appelle* l, l′ *les portées* AB, BC, *comprises entre le premier appui et le second, entre le second et le troisième ;*



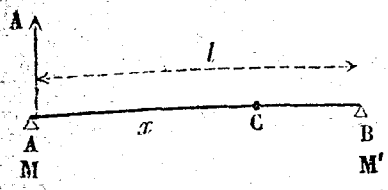
M, M′, M″ *les valeurs des moments fléchissants sur les appuis* A, B, C ; *enfin* p, p′ *les charges par unité de longueur supposées réparties également dans les deux travées* AB, BC ; *les moments* M, M′, M″ *sont liés par la relation linéaire :*

$$lM + 2(l + l')M' + l'M'' + \frac{1}{4}pl^3 + \frac{1}{4}p'l'^3 = 0.$$

Ce théorème donne autant d'équations qu'il en faut pour déterminer dans chaque cas particulier les valeurs des moments fléchissants sur les appuis, d'après l'hypothèse faite sur la distribution des charges entre les diverses travées. On remarquera que les longueurs l et l' entrent seules dans les coefficients des moments inconnus M, M′, M″.

Avant de démontrer le théorème, il est utile de poser un lemme préliminaire plus général.

Considérons une travée quelconque AB, comprise entre deux appuis de niveau A et B; nous supposons que les forces extérieures et les réactions des appuis sont verticales. Après avoir coupé la poutre sur l'appui A, on rétablira l'équilibre en appliquant à la poutre dans la section A un couple égal au moment fléchissant M qui existait avant la coupure. Appelons A la portion de la réaction de l'appui A qui s'exerce sur la travée AB; enfin représentons par une lettre μ, la somme des moments des forces extérieures données qui s'exercent sur la poutre à partir du point A jusqu'à un certain point C défini par son abscisse x, cette abscisse étant mesurée sur l'axe neutre de la poutre AB, à partir du point A pris pour origine : μ est donc une fonction connue de x.



Le moment fléchissant de la poutre au point C sera donné par l'équation :

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M + \mu + Ax.$$

Soit φ l'angle que fait en A avec l'horizon l'axe neutre déformé ; nous aurons en intégrant une première fois l'équation qui précède :

$$EI\left(\frac{dy}{dx} - \operatorname{tang}\varphi\right) = Mx + \int_0^x \mu dx + \frac{1}{2}Ax^2.$$

L'intégrale $\int_0^x \mu dx$ est une nouvelle fonction de x que nous représenterons par ρ; et nous aurons par suite, en intégrant une seconde fois :

$$EI\,(y - x\operatorname{tang}\varphi) = \frac{1}{2}Mx^2 + \int_0^x \rho dx + \frac{1}{6}Ax^3.$$

Dans ces équations, faisons $x = l$, et appelons N, Q, S, les valeurs que prennent pour cette valeur particulière de la variable les fonctions μ, $\rho = \int_0^x \mu dx$, et $\int_0^x \rho dx$; pour

cette même valeur $x = l$, on a $y = 0$, et $EI\frac{d^2y}{dx^2} = M'$, M′ désignant le moment fléchissant au point B; soit encore φ' l'angle que fait l'axe neutre déformé avec l'horizon au point B, de sorte que pour $x = l$, on ait $\frac{dy}{dx} = \text{tang}\varphi'$; il viendra les trois équations:

$$M' = M + N + Al,$$

$$EI(\text{tang}\varphi' - \text{tang}\varphi) = Ml + Q + \frac{1}{2}Al^2,$$

$$-EIl\,\text{tang}\varphi = \frac{1}{2}Ml^2 + S + \frac{1}{6}Al^3.$$

Éliminons A entre la première de ces équations et la troisième, puis entre la seconde et la troisième; il vient :

$$M'\frac{l^2}{6} + EIl\,\text{tang}\varphi = -\frac{1}{3}Ml^2 + \frac{1}{6}Nl^2 - S,$$

$$EI\frac{l}{3}\text{tang}\varphi' + \frac{2}{3}EIl\,\text{tang}\varphi = -\frac{1}{6}Ml^2 + \frac{1}{3}Ql - S.$$

Les quantités N, Q, S, qui dépendent des forces extérieures, sont connues; au contraire, M, M′, tg φ, tg φ' sont inconnues, et ces deux équations font voir que M′ et tg φ' sont des *fonctions linéaires* connues de M et tang φ, quelle que soit d'ailleurs la distribution des forces extérieures.

Il en serait encore de même si les deux appuis A et B n'étaient pas rigoureusement au même niveau.

Pour revenir au cas ordinaire où les forces extérieures données se réduisent à des poids uniformément répartis par unité de longueur, ou à p kilogrammes par mètre courant, il suffit d'observer qu'on a alors :

$$\mu = -\frac{1}{2}px^2,$$

$$\rho = \int_0^x \mu dx = -\frac{1}{6}px^3,$$

$$\int_0^x \rho dx = -\frac{1}{24}px^4,$$

et par suite, en faisant $x = l$:

$$N = -\frac{1}{2} pl^2,$$

$$Q = -\frac{1}{6} pl^3,$$

$$S = -\frac{1}{24} pl^4.$$

D'où résultent enfin les deux équations :

$$M = -2M - \frac{6EI}{l} \operatorname{tang} \varphi - \frac{1}{4} pl^2,$$

$$\operatorname{tang} \varphi' = -2 \operatorname{tang} \varphi - \frac{1}{2} \frac{l}{EI} M - \frac{1}{24} \frac{pl^3}{EI}.$$

Les angles φ et φ', étant très-petits, peuvent être pris pour leurs tangentes, et l'on parvient ainsi au lemme suivant :

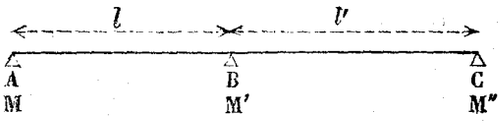
« Le moment fléchissant sur un appui quelconque, et « l'angle très-petit que forme en ce point avec l'horizon la « tangente à l'axe neutre déformé, sont exprimables par « des fonctions *linéaires* du moment fléchissant sur l'appui « précédent et de l'angle de la tangente à l'axe neutre avec « l'horizon sur ce même appui précédent. »

Ce lemme fournit une méthode générale pour trouver les moments fléchissants sur tous les appuis d'une poutre posée sur tant d'appuis qu'on voudra. En effet, appliqué au second appui, il conduit à exprimer le moment sur cet appui et l'angle d'inclinaison de l'axe neutre déformé, par des fonctions linéaires du seul angle φ_0 de l'axe neutre avec l'horizon sur le premier appui; car le moment fléchissant sur le premier appui est nul. Passant au troisième appui, on pourra, par de simples substitutions, exprimer aussi les deux inconnues M et φ correspondantes à cet appui par des fonctions linéaires de φ_0; et opérant de la même manière sur tous les appuis successifs, on finira par exprimer le moment fléchissant sur le dernier appui par une

fonction linéaire de φ_0. Or ce moment doit être nul. Il suffira donc d'égaler à zéro la fonction qui le représente pour avoir la valeur de φ_0 qui, substituée dans toutes les expressions précédemment trouvées, donnera la valeur de chacune des inconnues.

Le théorème des trois moments se déduit facilement, par l'élimination des angles φ, du lemme que nous venons d'établir.

Soient A, B, C, trois appuis consécutifs, et M, M′, M″ les moments fléchissants sur ces appuis ; appelons φ' l'angle de l'axe neutre avec l'horizon sur l'appui intermédiaire B. En vertu du lemme, on pourra exprimer M″ par une fonction linéaire de M′ et de φ' ; et par la même raison, on pourra exprimer M par une fonction linéaire de M′ et de φ' ; car il suffit pour cela de prendre les travées dans l'ordre inverse ; le même angle φ' se retrouvera pour les deux travées qui aboutissent au point B, parce qu'elles se raccordent tangentiellement sur cet appui. Entre les deux équations résultantes, on éliminera φ', et l'équation finale sera une relation linéaire entre M, M′, M″.



Appliquons cette méthode à une poutre continue posée sur des appuis de niveau et sollicitée dans chacune de ses travées par des poids uniformément répartis ; p, p' sont les charges par unité de longueur dans chaque travée ; pour la seconde BC, nous n'avons qu'à appliquer la relation trouvée plus haut :

$$M'' = -2M' - \frac{6EI}{l'}\varphi' - \frac{1}{4}p'l'^2.$$

Pour la première travée, on devra changer φ' en $-\varphi'$, car pour exprimer M en fonction de M′, on prend les appuis dans l'ordre rétrograde ; au lieu de l'angle que fait avec l'horizon la tangente à l'axe neutre dans la travée BC, on doit prendre

'angle que fait avec l'horizon le prolongement de cette tan-
;ente, angle qui est égal au premier changé de signe; on
aura donc la seconde équation :

$$M = -2M' + \frac{6EI}{l}\varphi' - \frac{1}{4}pl^2.$$

Multiplions la première par l', la seconde par l et ajoutons ; l'angle φ' s'élimine, nous obtenons l'équation :

$$Ml + 2M'(l + l') + M''l' + \frac{1}{4}pl^3 + \frac{1}{4}p'l'^3 = 0, \qquad (1)$$

et le théorème des trois moments est démontré.

On trouverait une relation linéaire de forme analogue entre les trois moments M, M', M'', dans le cas général où les forces seraient réparties d'une manière quelconque, et où il y aurait de petites différences de niveau entre les divers appuis. Mais nous nous bornerons à examiner dans ce qui suit le cas de la répartition uniforme des charges dans chacune des travées.

§ 2. *Résolution du système d'équations auquel conduit le théorème des trois moments.*

Considérons une poutre droite continue de n travées, reposant sur $n + 1$ appuis de niveau.

Appelons $l_1, l_2, \ldots l_n$ les longueurs de chaque travée, et $p_1, p_2, \ldots p_n$ les poids par unité de longueur dans chacune d'elles.

Le numéro d'une travée sert d'indice à la fois à la longueur l de cette travée, et au poids p qui y est uniformément réparti; il est égal au numéro de l'appui de gauche de la travée.

Appelons enfin $M_2, M_3, \ldots M_n$ les $n - 1$ moments fléchissants inconnus sur les appuis n^{os} 2, 3, ... n; nous omettons le moment fléchissant sur l'appui n° 1, ou sur la *première culée*, et le moment fléchissant sur l'appui

n° $(n+1)$ ou sur la *seconde culée*, parce que ces moments sont nuls, la poutre reposant sans encastrement sur ses appuis extrêmes.

On aura pour déterminer les $n-1$ moments inconnus, le groupe suivant de $n-1$ équations du premier degré, qui ne sont que l'application de l'équation (1) à trois appuis consécutifs quelconques :

$$2(l_1+l_2)\,M_2+l_2M_3=-\frac{1}{4}(p_1 l_1^3+p_2 l_2^3),$$

$$l_2M_2+2(l_2+l_3)\,M_3+l_3M_4=-\frac{1}{4}(p_2 l_2^3+p_3 l_3^3),$$

$$l_3M_3+2(l_3+l_4)\,M_4+l_4M_5=-\frac{1}{4}(p_3 l_3^3+p_4 l_4^3),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l_{n-2}M_{n-2}+2(l_{n-2}+l_{n-1})\,M_{n-1}+l_{n-1}M_n=-\frac{1}{4}(p_{n-2}l_{n-2}^3+p_{n-1}l_{n-1}^3)$$

$$l_{n-1}M_{n-1}+2(l_{n-1}+l_n)M_n=-\frac{1}{4}(p_{n-1}l_{n-1}^3+p_n l_n^3).$$

Nous poserons pour abréger :

$$P_2=\frac{1}{4}(p_1 l_1^3+p_2 l_2^3),$$

$$P_3=\frac{1}{4}(p_2 l_2^3+p_3 l_3^3),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_n=\frac{1}{4}(p_{n-1} l_{n-1}^3+p_n l_n^3),$$

les équations deviendront :

$$(M)\quad\begin{cases} 2(l_1+l_2)\,M_2+l_2M_3=-P_2,\\ l_2M_2+2(l_2+l_3)\,M_3+l_3M_4=-P_3,\\ l_3M_3+2(l_3+l_4)\,M_4+l_4M_5=-P_4,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ l_{n-2}M_{n-2}+2(l_{n-2}+l_{n-1})\,M_{n-1}+l_{n-1}M_n=-P_{n-1},\\ l_{n-1}M_{n-1}+2(l_{n-1}+l_n)M_n=-P_n. \end{cases}$$

Soit proposé de trouver M_2 ; on y parviendra en appliquant la méthode connue sous le nom de *méthode de Bezout*,

et qui consiste à faire disparaître toutes les inconnues, moins une, en multipliant les équations par des coefficients indéterminés. Ici nous multiplierons la *dernière* équation par l'unité, l'avant-dernière par un coefficient indéterminé α_1, la précédente par un autre coefficient indéterminé α_2, et ainsi de suite jusqu'à la première équation qui sera multipliée par un coefficient α_{n-2}.

Faisons ensuite la somme de toutes les équations ainsi transformées, et égalons à zéro les coefficients de M_3, M_4, ... M_n dans l'équation résultante. Il viendra pour déterminer M_2 l'équation :

$$M_2[2\alpha_{n-2}(l_1+l_2)+\alpha_{n-3}l_2)]=-P_2\alpha_{n-2}-P_3\alpha_{n-3}\ldots\ldots-P_{n-1}\alpha_1-P_n$$

et pour déterminer les $n-2$ coefficients inconnus (α), le groupe suivant de $n-2$ équations :

$$(A)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_{n-2}\,l_2+2\,\alpha_{n-3}\,(l_2+l_3)+\alpha_{n-4}\,l_3=0,\\ \alpha_{n-3}\,l_3+2\,\alpha_{n-4}\,(l_3+l_4)+\alpha_{n-5}\,l_4=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_3\,l_{n-3}+2\alpha_2\,(l_{n-3}+l_{n-2})+\alpha_1\,l_{n-2}=0,\\ \alpha_2\,l_{n-2}+2\,\alpha_1\,(l_{n-2}+l_{n-1})+l_{n-1}\ =0,\\ \alpha_1\,l_{n-1}+2\,(l_{n-1}+l_n)=0. \end{array}\right.$$

Or ces équations sont immédiatement résolubles; on tire α_1 de la dernière; cette valeur de α_1, substituée dans la précédente, donne α_2; l'antéprécédente donne α_3 au moyen de α_2 et de α_1, et ainsi de suite, chaque coefficient se déduisant des deux précédents ajoutés ensemble après avoir été multipliés par des nombres connus. L'analogie conduit à poser :

$$\alpha_{n-1}\,l_1+2\,\alpha_{n-2}\,(l_1+l_2)+\alpha_{n-3}\,l_2=0,$$

et l'introduction de ce nouveau coefficient α_{n-1} permet d'exprimer M_2 par la formule :

$$M_2=\frac{P_2\,\alpha_{n-2}+P_3\,\alpha_{n-3}+\ldots+P_{n-1}\,\alpha_1+P_n}{\alpha_{n-1}\,l_1}.$$

On remarquera que si l'on écrit en tête du groupe (A) l'équation qui définit α_{n-1}, on obtient un groupe qui ne diffère du groupe (M) qu'en ce que les moments inconnus

$$M_2,\ M_3,\ \ldots\ M_{n-1},\ M_n,$$

sont remplacés par les coefficients

$$\alpha_{n-2},\ \alpha_{n-3},\ \ldots\ \alpha_1,\quad 1,$$

et les quantités connues

$$P_2,\ P_3\ \ldots\ P_{n-1},\ P_n,$$

sont toutes remplacées par zéro, sauf la première, P_2 qui est remplacée par $\alpha_{n-1} l_1$.

Les coefficients (α) sont donnés par les équations :

$$\alpha_1 = -2\left(1+\frac{l_n}{l_{n-1}}\right),$$

$$\alpha_2 = -2\alpha_1\left(1+\frac{l_{n-1}}{l_{n-2}}\right) - \frac{l_{n-1}}{l_{n-2}},$$

$$\alpha_3 = -2\alpha_2\left(1+\frac{l_{n-2}}{l_{n-3}}\right) - \alpha_1\frac{l_{n-2}}{l_{n-3}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{n-2} = -2\alpha_{n-3}\left(1+\frac{l_3}{l_2}\right) - \alpha_{n-4}\frac{l_3}{l_2},$$

$$\alpha_{n-1} = -2\alpha_{n-2}\left(1+\frac{l_2}{l_1}\right) - \alpha_{n-3}\frac{l_2}{l_1}.$$

Il est facile de s'assurer que les coefficients α_1, α_2, $\alpha_3\ldots$, α_{n-2}, α_{n-1} ont des valeurs absolues qui sont croissantes, à partir du premier, α_1, dont la valeur absolue excède le nombre 2, et qu'ils sont alternativement positifs ou négatifs, à partir de α_1, qui est toujours négatif.

On obtient donc M_2 par la formule :

$$M_2 = \frac{\sum_2^n P_\tau \alpha_{n-\tau}}{\alpha_{n-1} l_1},$$

l'indice τ recevant dans cette somme toutes les valeurs en-

tières de 2 à n; pour que cette expression soit générale, il faut admettre que α_0 est égal à l'unité; c'est un premier coefficient constant qu'on peut mettre en tête de la suite des cofficients (α).

La même marche sert à déterminer M_n. On calculera une série $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots\ldots \gamma_{n-2}, \gamma_{n-1}$ comme on calcule la série $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}$, mais en commençant par l'autre bout de la poutre; on trouvera de cette manière :

$$\gamma_0 = 1,$$

$$\gamma_1 = -2\left(1+\frac{l_1}{l_2}\right),$$

$$\gamma_2 = -2\gamma_1\left(1+\frac{l_2}{l_3}\right)-\frac{l_2}{l_3},$$

$$\gamma_3 = -2\gamma_2\left(1+\frac{l_3}{l_4}\right)-\gamma_1\frac{l_3}{l_4}.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\gamma_{n-2} = -2\gamma_{n-3}\left(1+\frac{l_{n-2}}{l_{n-1}}\right)-\gamma_{n-4}\frac{l_{n-2}}{l_{n-1}},$$

$$\gamma_{n-1} = -2\gamma_{n-2}\left(1+\frac{l_{n-1}}{l_n}\right)-\gamma_{n-3}\frac{l_{n-1}}{l_n},$$

et M_n sera donné par l'équation :

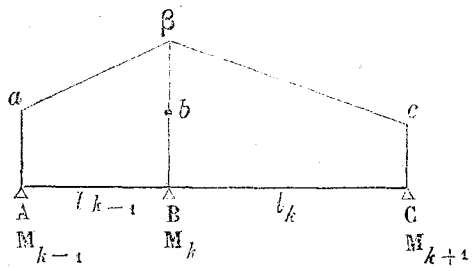
$$M_n = \frac{\sum_2^n P_\tau \gamma_{\tau-2}}{\gamma_{n-1} l_n}.$$

Nous verrons plus loin qu'au moyen des deux séries (α) et (γ) on peut calculer directement un moment fléchissant quelconque. Observons d'ailleurs que quand la poutre est symétrique par rapport à son milieu, les deux séries (α) et (γ) sont composées respectivement des mêmes nombres.

§ 3. *Construction géométrique des moments sur les appuis.*

Connaissant M_2, on en déduira successivement M_3, M_4..., M_n; cette recherche se fait aisément par des constructions géométriques.

Lorsqu'une poutre repose sur un certain nombre d'appuis, les moments fléchissants sur les appuis intermédiaires sont tous négatifs. Sur les verticales Aa, Bb, Cc, passant par les appuis A, B, C, dont les numéros sont $k-1$, k, $k+1$, prenons des longueurs Aa, Bb, Cc égales aux valeurs absolues de M_{k-1}, M_k, M_{k+1}, doublons la longueur intermédiaire en prenant $B\beta = 2Bb$; joignons $a\beta$, $c\beta$; nous formons ainsi deux trapèzes dont la surface totale est égale à

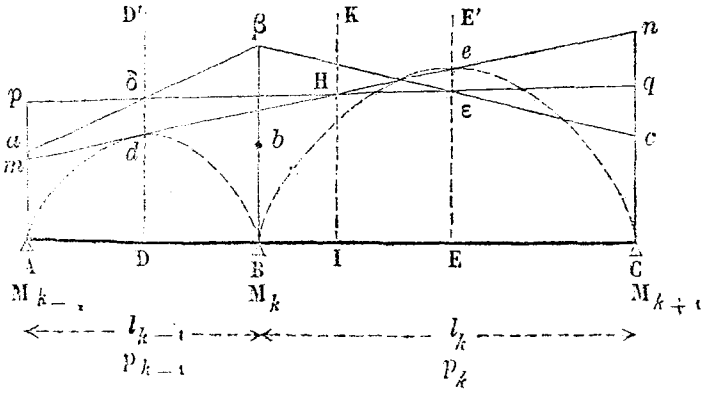


$$AB \times \frac{Aa+B\beta}{2} + BC \times \frac{B\beta+Cc}{2} = -l_{k-1}\frac{M_{k-1}+2M_k}{2} - l_k \frac{2M_k+M_{k+1}}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[l_{k-1}M_{k-1} + 2(l_{k-1}+l_k)M_k + l_k M_{k+1}\right) = \frac{1}{2} P_k.$$

Le théorème des trois moments donne donc la mesure de l'aire formée par la somme des deux trapèzes ABβa, BC$c\beta$, dont les bases sont égales aux longueurs des travées, et dont les hauteurs ont un rapport simple avec les moments fléchissants sur les appuis. On peut se servir de cette propriété pour construire géométriquement la valeur absolue de M_{k+1}, au moyen des valeurs absolues de M_{k-1} et de M_k.

Soit en valeur absolue $Aa = M_{k-1}$, $Bb = M_k$; prenons $B\beta = Bb \times 2$.



La valeur absolue Cc de M_{k+1} est inconnue. Prenons les milieux δ et ε des côtés $a\beta$, βc, et par ces deux points menons la droite δε qui, prolongée, rencontre en p et q les verticales Aa, Cc ; le trapèze ApqC est égal à la somme des trapèzes $Aa\beta$B, BβcC, et par suite il a pour mesure $\frac{1}{2} P_k$. Par le milieu I de la distance AC, menons la verticale IK, qui coupe pq en H ; le trapèze ApqC a pour mesure AC × IH, et par suite $IH = \frac{\frac{1}{2} P}{AC}$. Le point H est donc connu de position sur la droite IK, et par suite, connaissant le point δ, milieu de $a\beta$, le point ε se trouve à l'intersection de la droite δH avec la verticale EE′ élevée sur le milieu de BC.

Au lieu de déterminer la longueur IH par l'équation $IH = \frac{\frac{1}{2} P_k}{AC}$, on peut l'obtenir par une construction géométrique. Sur les verticales DD′, EE′ élevées au milieu des portées AB, BC, prenons des quantités Dd, Ee, égales à $\frac{1}{8} p_{k-1} l_{k-1}^2$ et $\frac{1}{8} p_k l_k^2$, c'est-à-dire aux valeurs des moments fléchissants qui existeraient aux milieux des portées AB, BC, si elles étaient coupées sur les appuis A, B, C ; par les points d et e, menons la droite mn, qui forme le trapèze AmnC ; ce trapèze a pour surface :

$$AB \times Dd + BC \times Ee,$$

ou bien :

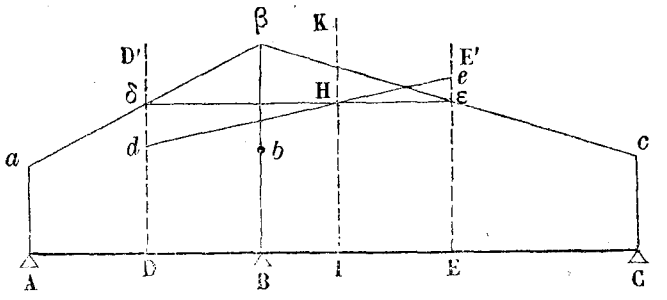
$$l_{k-1} \times \frac{1}{8} p_{k-1} l_{k-1}^2 + l_k \times \frac{1}{8} p_k l_k^2 =$$

$$= \frac{1}{8} (p_{k-1} l_{k-1}^3 + p_k l_k^3) = \frac{1}{2} P_k.$$

Donc la droite mn passe par le point H comme la droite δε.

En résumé, voici la suite des constructions à faire pour trouver M_{k+1} connaissant M_k et M_{k-1}.

Sur les verticales Aa, Bb, passant par les appuis A et B,



prenons Aa égale à la valeur absolue de M_{k-1} et Bβ égale au double de la valeur absolue de M_k; joignons $a\beta$ et prenons le point δ milieu de $a\beta$. Par les points D, E, I, milieux de AB, BC et AC, élevons sur AC des perpendiculaires indéfinies et prenons

$$Dd = \frac{1}{8} p_{k-1} l_{k-1}^2, \qquad Ee = \frac{1}{8} p_k l_k^2 ;$$

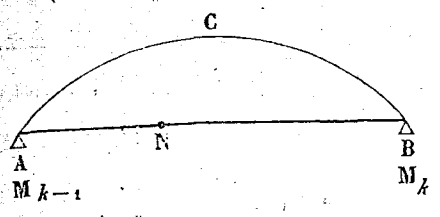
joignons *de* qui coupe IK en H; joignons δH qui, prolongée, coupe EE′ en ε; enfin joignons βε qui, prolongée, coupe en *c* la verticale passant par le point C. C*c* sera la valeur absolue du moment fléchissant M_{k+1}.

On pourra appliquer cette construction aux deux premières travées, en observant que le moment sur le premier appui est nul; connaissant M_2 par le calcul, on en déduira donc M_3; la même construction appliquée à la seconde et à la troisième travée donnera M_4 et ainsi de suite jusqu'aux dernières travées. Appliquée aux deux dernières travées, la construction devra donner zéro pour le moment sur le dernier appui; c'est une vérification.

Supposons que tous les moments fléchissant sur les appuis soient déterminés, et proposons-nous d'en déduire le moment fléchissant dans une section quelconque de la poutre.

La section dont il s'agit est située dans une travée AB, comprise entre le $(k-1)^{me}$ et le k^{me} appui; elle est définie dans cette travée par son abscisse AN $= x$.

Nous aurons en ce point, et appelant M le moment fléchissant variable avec x :



$$M = M_{k-1} + Ax - \frac{1}{2} p_{k-1} x^2.$$

A est l'effort tranchant en A dans la travée AB ; faisant $x = l_{k-1}$, M devient égal à M_k, et par suite

$$M_k = M_{k-1} + A l_{k-1} - \frac{1}{2} p_{k-1} l_{k-1}^2.$$

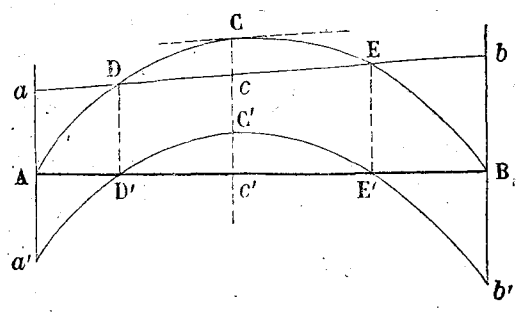
Entre ces deux équations éliminons A, nous obtiendrons l'équation finale :

$$M l_{k-1} - M_k x = M_{k-1} (l_{k-1} - x) + \frac{1}{2} p_{k-1} l_{k-1} x (l_{k-1} - x),$$

ou bien

$$M = \frac{M_{k-1} (l_{k-1} - x) + M_k x}{l_{k-1}} + \frac{1}{2} p_{k-1} x (l_{k-1} - x).$$

Le moment M en un point quelconque de AB se compose donc de deux parties ; l'une, $\frac{1}{2} p_{k-1} x (l_{k-1} - x)$, est la valeur qu'aurait le moment fléchissant au point défini par l'abscisse x, si la travée AB était coupée sur ses deux appuis ; cette portion est représentée par les ordonnées d'une parabole ACB dont l'axe coïncide avec la droite élevée perpendiculairement au milieu de AB. L'autre partie,



$\frac{M_{k-1}(l_{k-1} - x) + M_k x}{l_{k-1}}$ représentée par les ordonnées d'une droite, passant par le point $x = 0$, $M = M_{k-1}$ et par le point $x = l_{k-1}$, $M = M_k$; en d'autres termes, par les ordonnées d'une droite joignant les extrémités des longueurs Aa, Bb, qui représentent les moments fléchissants en A et en B ; M_{k-1}, M_k sont des nombres négatifs, et l'addition des deux portions de la valeur

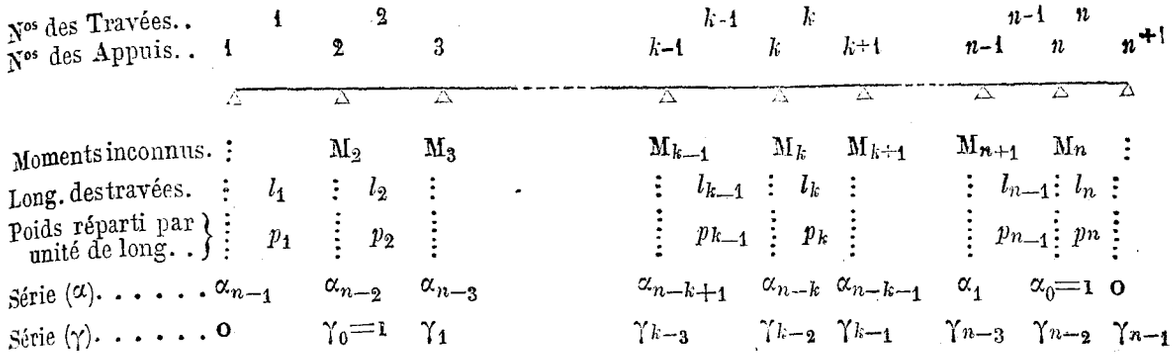
de M revient à soustraire de la première partie la seconde partie prise positivement. Prenons donc sur les verticales Aa, Bb, passant par les appuis, des quantités Aa, Bb égales aux valeurs absolues de M_{k-1}, M_k et joignons ab; nous aurons le nouvel axe par rapport auquel il faut prendre les ordonnées de la parabole ACB pour avoir la valeur complète de M. Ainsi, au point A, M est égal à — Aa; M est nul en D', projection du point D où ab coupe la parabole; M est maximum au point c', projection du point C où la tangente à la parabole ACB est parallèle à ab; il se retrouve nul en E', projection du point E; enfin en B il est égal à — Bb; la courbe des moments a'D'C'E'b' s'obtient ainsi en prenant pour ordonnées la différence des ordonnées des deux contours ACB et ab. C'est la parabole ACB elle-même déplacée de manière que son axe reste toujours vertical et qu'elle passe par les deux points donnés a' et b'.

On peut remarquer que des deux lignes ACB, ab qui concourent à former la courbe définitive $a'C'b'$ des moments, l'une ACB résulte entièrement du poids p_{k-1} uniformément réparti dans la travée AB, tandis que la position de la droite ab dépend des charges uniformes réparties dans toutes les travées. Chaque travée doit être considérée successivement comme pleine ou comme vide; on ne peut donc trouver pour chacune que deux contours ACB, l'un correspondant au poids de la travée pleine, l'autre à son poids propre sans addition de surcharge; il y a au contraire autant de droites ab à considérer qu'il y a d'hypothèses distinctes à faire sur la distribution des surcharges entre les diverses travées.

§ 4. *Détermination directe d'un moment quelconque.*

Une méthode analogue à celle que nous avons tracée pour déterminer M_2 ou M_n, conduit à la détermination directe d'un moment M_k quelconque. Avant de l'exposer, il

est bon de former avec toutes les quantités qui entrent da le problème, connues, inconnues, ou coefficients auxiliaire un diagramme où elles soient chacune attribuées sans an biguïté à une travée ou à un appui. C'est l'objet de figure suivante.



On voit par ce tableau qu'à chaque appui, correspondent un coefficient (α) et un coefficient (γ), et que la somme des indices de ces deux coefficients est constante et égale à $n-2$.

Revenons aux équations (M).

Le moment inconnu M_k se trouve dans la $(k-2)^{me}$ équation de ce groupe avec le coefficient l_{k-1}, dans la $(k-1)^{me}$ avec le coefficient $2(l_{k-1}+l_k)$, et dans la k^{me} avec le coefficient l_k. Multiplions la première des équations (M) par α_{n-k}, la seconde par $\alpha_{n-k}\gamma_1$, la 3^{me} par $\alpha_{n-k}\gamma_2$, ... jusqu'à la $(k-1)^{me}$, que nous multiplierons par $\alpha_{n-k}\gamma_{k-2}$; puis continuons en multipliant la k^{me} par $\alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2}$; la $(k+1)^{me}$ par $\alpha_{n-k-2}\gamma_{k-2}$, et ainsi de suite jusqu'à $(n-1)^{me}$ et dernière qui sera multipliée par γ_{k-2}; faisons la somme des équations ainsi préparées, et tous les moments inconnus disparaîtront, sauf M_k; nous trouverons comme résultat final :

$$M_k = -\frac{\alpha_{n-k}(P_2+P_3\gamma_1+\ldots+P_{k-1}\gamma_{k-3})+P_k\alpha_{n-k}\gamma_{k-2}+\gamma_{k-2}(P_{k+1}\alpha_{n-k-1}+\cdots+P_{n-1}\alpha_1+P_n)}{l_{k-1}\alpha_{n-k}\gamma_{k-3}+2(l_{k-1}+l_k)\alpha_{n-k}\gamma_{k-2}+l_k\alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2}}.$$

Le dénominateur du second membre peut se simplifier,

en observant que l'on a entre les trois coefficients consécutifs γ_{k-3}, γ_{k-2}, γ_{k-1}, la relation :

$$l_{k-1}\gamma_{k-3} + 2(l_{k-1} + l_k)\gamma_{k-2} + l_k\gamma_{k-1} = 0.$$

Multipliant par α_{n-k}, il vient :

$$l_{k-1}\gamma_{k-3}\alpha_{n-k} + 2(l_{k-1} + l_k)\alpha_{n-k}\gamma_{k-2} + l_k\alpha_{n-k}\gamma_{k-1} = 0,$$

et par suite le dénominateur M_k se transforme en

$$l_k(\alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2} - \alpha_{n-k}\gamma_{k-1});$$

ou, avec la suppression du signe — devant le second membre :

$$l_k(\alpha_{n-k}\gamma_{k-1} - \alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2}).$$

C'est le produit de la longueur l_k de la k^{me} travée par la *différence des produits en croix* des coefficients (α) et (γ) qui correspondent aux appuis sur lesquels porte cette travée. Le dénominateur de la valeur de M_k est ainsi relatif à l'une des deux travées qui aboutissent à l'appui sur lequel s'exerce le moment M_k; le numérateur, au contraire, ne contient que des termes relatifs aux divers appuis; il est permis de conclure de cette simple remarque que le dénominateur pourrait aussi bien se représenter par le produit

$$l_{k-1}(\alpha_{n-k+1}\gamma_{k-2} - \alpha_{n-k}\gamma_{k-3}),$$

formé au moyen de la longueur l_{k-1} et des coefficients (α) et (γ) pris dans la travée précédente, que par le produit $l_k(\alpha_{n-k}\gamma_{k-1} - \alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2})$ auquel nous sommes parvenus; et de là résulte ce théorème : « Le produit de la « longueur d'une travée par la différence des produits en « croix des coefficients (α) et (γ) qui correspondent aux « appuis comprenant cette travée, est constant dans toute « l'étendue de la poutre. »

On démontre directement ce théorème en se reportant aux équations :

$$l_{k-1}\gamma_{k-3} + 2(l_{k-1} + l_k)\gamma_{k-2} + l_k\gamma_{k-1} = 0,$$
$$l_{k-1}\alpha_{n-k+1} + 2(l_{k-1} + l_k)\alpha_{n-k} + l_k\alpha_{n-k-1} = 0$$

qui établissent la relation entre γ_{k-3}, γ_{k-2}, γ_{k-1}, d'une part, et entre α_{n-k+1}, α_{n-k}, α_{n-k-1}, de l'autre.

Si l'on multiplie la première de ces équation par α_{n-k}, la seconde par γ_{k-2}, et qu'on retranche, il vient :

$$l_{k-1}(\alpha_{n-k+1}\gamma_{k-2} - \alpha_{n-k}\gamma_{k-3}) = l_k(\alpha_{n-k}\gamma_{k-1} - \alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2}) = \mathrm{L}.$$

Ce produit constant L, pris dans la première travée est égal à $l_1\alpha_{n-1}$, ou dans la dernière, à $l_n\gamma_{n-1}$, et l'on a la formule générale :

$$\mathrm{M}_k = \frac{\alpha_{n-k}\sum_2^k \mathrm{P}_\tau\gamma_{\tau-2} + \gamma_{k-2}\sum_{k+1}^n \mathrm{P}_\tau\gamma_{n-\tau}}{\mathrm{L}}.$$

Le dénominateur commun L a le signe de α_{n-1} ; il est positif si le nombre n des travées est impair, et négatif dans le cas contraire.

§ 5. *Propriétés des nombres* (α) *et* (γ).

1. Les nombres (α) et (γ) ont quelques propriétés intéressantes que nous allons indiquer dans ce paragraphe. On vient de reconnaître que le produit de la longueur l d'une travée, par le *déterminant* $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma$ des coefficients $\begin{Bmatrix} \alpha & \alpha' \\ \gamma & \gamma' \end{Bmatrix}$ qui correspondent à ses appuis est une quantité constante, quelle que soit la travée considérée. On peut aussi poser une relation entre trois coefficients (α) consécutifs, et les trois coefficients (γ) relatifs aux mêmes appuis, dans laquelle n'entre aucune longueur de travée ; il suffit pour cela d'éliminer le rapport $\frac{l_k}{l_{k-1}}$ entre les deux équations qui lient γ_{k-3}, γ_{k-2}, γ_{k-1} d'une part, et α_{n-k+1}, α_{n-k}, α_{n-k-1} de l'autre.

Pour cela on donnera à ces équations la forme

$$\begin{aligned} l_{k-1}(\gamma_{k-3} + 2\gamma_{k-2}) &= -l_k(2\gamma_{k-2} + \gamma_{k-1}), \\ l_{k-1}(\alpha_{n-k+1} + 2\alpha_{n-k}) &= -l_k(2\alpha_{n-k} + \alpha_{n-k-1}), \end{aligned}$$

et la division éliminera les longueurs de travées :

$$\frac{\gamma_{k-3} + 2\gamma_{k-2}}{2\gamma_{k-2} + \gamma_{k-1}} = \frac{\alpha_{n-k+1} + 2\alpha_{n-k}}{2\alpha_{n-k} + \alpha_{n-k-1}}.$$

2. Les nombres α_n, γ_n, sont positifs ou négatifs suivant que n est pair ou impair, et ils ont une valeur absolue d'autant plus grande que n est plus grand. Il résulte de là :

1° Que la somme ou la différence, $\alpha_n \pm \alpha_{n-1}$, de deux termes consécutifs d'une même série (α) a toujours le signe de celui des deux termes qui a le plus grand indice, c'est-à-dire le signe de α_n, et que la valeur absolue de la somme $\alpha_n + \alpha_{n-1}$ est moindre que celle de α_n, tandis que la valeur absolue de la différence $\alpha_n - \alpha_{n-1}$ est plus grande ;

2° Que les produits $\alpha_n\alpha_k$, ou $\alpha_n\gamma_k$ de deux termes pris comme on voudra dans une des séries (α), (γ) ou dans les deux, sont positifs si les indices n et k sont à la fois pairs ou à la fois impairs, et négatifs si l'un des indices est pair et l'autre impair ; ce qui revient à dire que les produits $\alpha_n\,\alpha_k$, ou $\alpha_n\,\gamma_k$ sont positifs ou négatifs suivant que la somme $n + k$ des indices est paire ou impaire, ou encore qu'ils ont toujours le signe de $(-1)^{n+k}$.

Il en est de même des quotients $\frac{\alpha_n}{\alpha_k}$ ou $\frac{\alpha_n}{\gamma_k}$, et plus généralement encore, le nombre $\frac{\alpha_n\gamma_k\ldots.}{\alpha_{n'}\gamma_{k'}\ldots.}$ est positif ou négatif suivant que la somme $n + k + n' + k' + \ldots.$ des indices des facteurs du numérateur et du dénominateur est paire ou impaire.

3. Supposons que toutes les travées soient égales, et qu'elles soient en nombre indéfini. Les deux séries (α) et (γ) se réduiront à une seule et même série, savoir :

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 1,\\
\alpha_1 &= -4,\\
\alpha_2 &= 15,\\
\alpha_3 &= -56.\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Généralement

$$\alpha_n = -4\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}, \quad \text{ou} \quad \alpha_n + 4\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} = 0.$$

Avec les nombres α_0, α_1, α_2, ... α_n, ... formons un polynome indéfini :

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots,$$

et multiplions-le par

$$1 + 4x + x^2;$$

le produit se réduira à

$$\alpha_0 + (\alpha_1 + 4\alpha_0)\, x,$$

ou toutes réductions faites, à l'unité; les termes de degré supérieur disparaissent du produit parce qu'ils ont pour coefficient général la somme $\alpha_n + 4\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$, qui est constamment nulle; donc le polynome $1 - 4x + 15x^2 - 56x^3 + \ldots$ dont les coefficients sont les valeurs des termes de la série (α) s'obtient en divisant l'unité par le trinome $1 + 4x + x^2$.

Mais on a identiquement :

$$\frac{1}{1 + 4x + x^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}}{(2 - \sqrt{3}) + x} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}}{(2 + \sqrt{3}) + x},$$

et des développements séparés des deux fractions du second membre conduisent à deux progressions géométriques; faisant la somme des termes généraux de ces deux progressions, on aura l'expression générale de α_n :

$$\alpha_n = (-1)^n \frac{(2+\sqrt{3})^{n+1} - (2-\sqrt{3})^{n+1}}{2\sqrt{3}},$$

nombre rationnel et entier.

On obtiendrait des résultats analogues si les travées successives, au lieu d'être égales, étaient les termes d'une progression géométrique.

4. Supposons encore les travées égales. On sait, et il est facile de vérifier, que les nombres $x = 2$, $y = 1$ forment la moindre solution en nombres entiers de l'équation indéterminée $x^2 - 3y^2 = 1$, la solution $x = 1$, $y = 0$ étant écartée; il en résulte que toutes les solutions entières et positives de cette équation sont comprises dans les formules générales :

$$x = \frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2},$$

$$y = \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}},$$

n étant un entier positif quelconque; on retrouve pour y, au signe près, la valeur générale de α_{n-1}.

De là ce théorème que, dans le cas où les travées sont égales, $1 + 3\alpha^2_n$ est un carré entier, quel que soit l'indice n. On peut le vérifier sur les nombres 1, 4, 15, 56... valeurs absolues des premiers termes de la série (α).

Ainsi $1 + 3 \times \overline{56}^2 = 9409$, carré de 97.

5. Lorsque toutes les travées sont égales, si n est leur nombre, la série (α) se terminera au terme α_{n-1}; et la série (γ) comprendra les nombres α eux-mêmes, de telle sorte que $\gamma_{n-1} = \alpha_{n-1}$, $\gamma_{n-2} = \alpha_{n-2}$..... Donc le produit

$$l_k(\alpha_{n-k}\gamma_{k-1} - \alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2})$$

devient dans ce cas égal à $l_k(\alpha_{n-k}\alpha_{k-1} - \alpha_{n-k-1}\alpha_{n-2})$, et laissant de côté le facteur l_k qui est constant, on voit que pour une valeur donnée de n, le produit

$$\alpha_{n-k}\alpha_{k-1} - \alpha_{n-k-1}\alpha_{k-2}$$

est le même quelle que soit la valeur de k.

6. Nous terminerons par la remarque suivante sur les nombres de la série (α)

$$1, \quad -4, \quad 15, \quad -56, \ldots.$$

Nous avons en même temps les deux équations :

$$\alpha_{n+1} = -4\alpha_n - \alpha_{n-1},$$

et

$$\alpha_{n+2} = -4\alpha_{n+1} - \alpha_n.$$

Multiplions la première par α_{n+1}, la seconde par α_n, et retranchons, il viendra :

$$\alpha^2_{n+1} - \alpha_n \alpha_{n+2} = \alpha^2_n - \alpha_{n-1}\alpha_{n+1};$$

c'est-à-dire que l'excès du carré d'un terme de la suite (α) sur le produit du terme précédent et du terme suivant, est constant pour tous les termes; et en faisant le calcul pour le terme $\alpha_1 = -4$, on voit que cet excès est partout égal à l'unité. On a en effet :

$$\begin{aligned} 4^2 - 1 \times 15 &= 16 - 15 = 1. \\ 15^2 - 4 \times 56 &= 225 - 224 = 1. \\ 56^2 - 15 \times 209 &= 3136 - 3135 = 1. \\ &\vdots \end{aligned}$$

§ 6. *Formules approximatives.*

La méthode fondée sur l'emploi du théorème des trois moments est très-simple et l'application en est facile ; cependant, lorsque le nombre de travées est très-grand, il est préférable d'employer des formules approximatives qui font connaître les moments demandés avec une précision bien suffisante pour la pratique des constructions. En général les poutres que l'on a à traiter ont leurs travées centrales toutes égales entre elles, et les travées extrêmes, ou *travées de rive*, sont un peu moindres que les travées centrales; elles sont d'ailleurs égales l'une à l'autre. On a donc $l_1 = l_n$, et $l_2 = l_3 = \ldots\ldots = l_{n-1}$. Dans ce cas, la poutre est symétrique par rapport au milieu de sa longueur, et les séries (α) et (γ) sont composées des mêmes nombres. Les valeurs absolues des coefficients α_k croissent rapidement

avec l'indice k, de sorte qu'on peut se borner à prendre dans les formules complètes les termes du numérateur dont les coefficients ont les plus forts indices. Nous n'en conserverons que trois.

Trois cas sont alors à distinguer :

1° S'il s'agit de déterminer M_2, nous n'admettrons dans la formule que les trois termes en P_2, P_3 et P_4.

Reprenons les formules générales :

$$\alpha_{n-3} = -2\alpha_{n-4}\left(1+\frac{l_4}{l_3}\right) - \alpha_{n-5}\frac{l_4}{l_3},$$
$$\alpha_{n-2} = -2\alpha_{n-3}\left(1+\frac{l_3}{l_2}\right) - \alpha_{n-4}\frac{l_3}{l_2},$$
$$\alpha_{n-1} = -2\alpha_{n-2}\left(1+\frac{l_2}{l_1}\right) - \alpha_{n-3}\frac{l_2}{l_1}.$$

Négligeons α_{n-5}, et remplaçons $\frac{l_4}{l_3}$, $\frac{l_3}{l_2}$ par l'unité, il viendra :

$$\alpha_{n-3} = -4\alpha_{n-4},$$
$$\alpha_{n-2} = 15\alpha_{n-4},$$
$$\alpha_{n-1}l_1 = -30\alpha_{n-4}(l_1+l_2) + 4\alpha_{n-4}l_2,$$

et par suite, le facteur commun α_{n-4} disparait aux deux termes de la fraction qui donne M_2 :

$$M_2 = -\frac{15P_2 - 4P_3 + P_4}{30l_1 + 26l_2}.$$

La même formule s'appliquerait à M_n :

$$M_n = -\frac{15P_n - 4P_{n-1} + P_{n-2}}{30l_n + 26l_{n-1}}.$$

3° Proposons-nous de déterminer approximativement M_3, en ne conservant de même que les termes en P_2, P_3 et P_4. La formule réduite sera :

$$M_3 = \frac{\alpha_{n-3}P_2 + \gamma_1(P_3\alpha_{n-3} + P_4\alpha_{n-4})}{l_2(\alpha_{n-2}\gamma_1 - \alpha_{n-3}\gamma_0)},$$

et l'on aura comme tout à l'heure :

$$\alpha_{n-3} = -\ 4\alpha_{n-4},$$
$$\alpha_{n-2} = \quad 15\alpha_{n-4},$$

avec

$$\gamma_1 = -\ 2\left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right)$$

et

$$\gamma_0 = 1.$$

Donc :

$$M_3 = -\ \frac{-4P_2 l_1 + 2(l_1 + l_2)(4P_3 - P_4)}{l_2(26l_1 + 30l_2)}.$$

3° Enfin, soit proposé de trouver une valeur approximative de M_k, en n'employant que P_{k-1}, P_k et P_{k+1}, k étant > 3 et $< n - 1$. Dans l'étendue de la poutre qui correspond à ces trois valeurs de P, toutes les travées sont égales. On a, en effaçant tous les autres termes de la formule générale :

$$M_k = \frac{P_{k-1}\alpha_{n-k}\gamma_{k-3} + P_k\alpha_{n-k}\gamma_{k-2} + P_{k+1}\alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2}}{L},$$

$$\alpha_{n-k} = -\ 4\alpha_{n-k-1}$$

et

$$\gamma_{k-2} = -\ 4\gamma_{k-3}, \qquad \gamma_{k-1} = 15\gamma_{k-3},$$

enfin

$$L = l(\alpha_{n-k}\gamma_{k-1} - \alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2}) = l\alpha_{n-k-1}\gamma_{k-3}(-4 \times 15 + 4) =$$
$$= -\ 56l\alpha_{n-k-1}\gamma_{k-3},$$

l étant la longueur d'une travée centrale quelconque.

Substituant ces valeurs approximatives, et supprimant le facteur commun $\alpha_{n-k-1} \times \gamma_{k-3}$,

$$M_k = \frac{-4P_{k-1} + 16P_k - 4P_{k+1}}{-56l} = -\ \frac{4P_k - (P_{k-1} + P_{k+1})}{14l}.$$

Ces formules très-simples feront connaître en général les valeurs des inconnues avec une exactitude suffisante.

Si après avoir déterminé une valeur approximative quelconque de M_2, on emploie cette valeur inexacte pour calculer M_3, M_4,..... M_n, au moyen des équations (M), la dernière équation ne sera pas satisfaite, et pour la rendre identique, on devra ajouter à son premier membre un terme El_n, dans lequel E représentera le moment sur le $(n+1)^{me}$ appui correspondant à la valeur fautive attribuée à M_2.

Appelons M'_2, M'_3, M'_4, ... M'_n, les valeurs inexactes trouvées pour les moments fléchissants par cette méthode, et δ_2, δ_3,..... δ_n les corrections qu'il faut y ajouter pour obtenir les vraies valeurs : nous aurons à la fois les deux groupes suivants d'équations, savoir :

$$\left\{\begin{array}{l} 2M'_2(l_1+l_2)+M'_3 l_2 = -P_2 \\ M'_2 l_2+2M'_3(l_2+l_3)+M'_4 l_3 = -P_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M'_{n-1} l_{n-1}+2M'_n(l_{n-1}+l_n)+El_n = -P_n \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2(M'_2+\delta_2)(l_1+l_2)+(M'_3+\delta_3) l_2 = -P_2 \\ (M'_2+\delta_2) l_2+2(M'_3+\delta_3)(l_2+l_3)+(M'_4+\delta_n) l_3 = -P_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (M'_{n-1}+\delta_{n-1}) l_{n-1}+2(M'_n+\delta_n)(l_{n-1}+l_n) = -P_n \end{array}\right.$$

On tire de là, en retranchant le premier groupe du second, un troisième groupe qui ne contient plus que les δ :

$$(\Delta)\qquad \left\{\begin{array}{l} 2\delta_2(l_1+l_2)+\delta_3 l_2 = 0 \\ \delta_2 l_2+2\delta_3(l_2+l_3)+\delta_4 l_3 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_{n-1} l_{n-1}+2\delta_n(l_{n-1}+l_n) = El_n. \end{array}\right.$$

Ce groupe (Δ) n'est autre chose que le groupe (M) où l'on aurait remplacé les M par les δ de même indice, et où l'on aurait mis o à la place de P_2, P_3,..... P_{n-1}, et El_n au

lieu de $-P_n$. On aura donc en appliquant la formule :

$$\delta_2 = -\frac{E l_n}{\alpha_{n-1} l_1}.$$

Cette correction est rigoureuse, quelque valeur qu'on ait prise pour M'_2, et l'on a toujours exactement :

$$M_2 = M'_2 - \frac{E l_n}{\alpha_{n-1} l_1}$$

Une valeur arbitraire quelconque attribuée à M_2, conduit donc immédiatement à la valeur exacte de cette inconnue. Connaissant M_2, les valeurs exactes de M_3, M_4,..... M_n se tireront des équations (M) ou se construiront géométriquement comme on l'a indiqué.

Si le nombre des travées est très-grand, α_{n-1} a une très-grande valeur absolue, et par suite une faible erreur, δ_2, commise sur M_2, peut entraîner dans la suite du calcul un écart E très-considérable; mais cet écart, si grand qu'il soit, peut servir à trouver les véritables valeurs des inconnues.

§ 7. *Efforts tranchants et réactions des appuis.*

Soit A_k l'effort tranchant qui s'exerce sur l'appui n° k dans la travée de même numéro; l_k est la longueur de cette travée, p_k son poids par mètre courant; pour déterminer A_k, nous ferons usage de la formule :

$$M = M_k + A_k x - \frac{1}{2} p_k x^2,$$

qui devient pour $x = l_k$,

$$M_{k+1} = M_k + A_k l_k - \frac{1}{2} p_k l_k^2.$$

Donc

$$A_k = \frac{1}{2} p_k l_k + \frac{M_{k+1} - M_k}{l_k}.$$

Si l'on voulait l'effort tranchant B_{k+1} sur l'appui n° $(k+1)$

dans la travée n° k, on l'obtiendrait facilement en faisant $x = l_k$ dans l'expression de la dérivée $\frac{dM}{dx}$ du moment fléchissant par rapport à l'abscisse; on aurait ainsi

$$B_{k+1} = A_k - p_k l_k,$$

de sorte que la différence $A_k - B_{k+1}$ est égale au poids $p_k l_k$ de la travée; substituant la valeur de A_k, on trouve :

$$B_{k+1} = -\frac{1}{2} p_k l_k + \frac{M_{k+1} - M_k}{l_k}.$$

Pour avoir la charge totale de l'appui n° k, on remarquera qu'elle est égale à $A_k - B_{k-1}$, de sorte qu'il faut dans la seconde équation changer k en $k - 1$, puis retrancher l'équation ainsi transformée de l'équation qui donne A_k; il viendra

$$F_k = A_k - B_{k-1} = \left(\frac{1}{2} p_{k-1} l_{k-1} + \frac{1}{2} p_k l_k\right) + \left[\frac{M_{k-1}}{l_{k-1}} - M_k \left(\frac{1}{l_{k-1}} + \frac{1}{l_k}\right) + \frac{M_{k+1}}{l_k}\right].$$

La première parenthèse est la charge que supporterait l'appui si la poutre, au lieu d'être continue, était coupée sur les appuis; la seconde renferme les moments fléchissants, et représente l'influence de la continuité des travées.

La réaction du premier appui, ou première culée, est donnée par la formule :

$$A_1 = \frac{1}{2} p_1 l_1 + \frac{M_2}{l_1},$$

ou bien en substituant la valeur générale de M_2 :

$$A_1 = \frac{1}{2} p_1 l_1 + \frac{\Sigma P \alpha}{\alpha_{n-1} l^2_1}.$$

De même la réaction du dernier appui, ou seconde culée, est égale à $-B_{n+1}$, ou à

$$\frac{1}{2} p_n l_n + \frac{M_n}{l_n} = \frac{1}{2} p_n l_n + \frac{\Sigma P \gamma}{\gamma_{n-1} l^2_n}.$$

La détermination de l'effort tranchant en un point donné résulte donc entièrement de la connaissance des moments fléchissants sur les appuis.

CHAPITRE IV.

RECHERCHE DES HYPOTHÈSES A FAIRE SUR LA DISTRIBUTION DES SURCHARGES.

§ 1.

Quand on étudie le projet d'une poutre métallique posée sur plus de deux appuis, chaque travée peut être successivement supposée vide ou surchargée; dans le premier cas, elle porte uniquement son poids propre ; dans le second, au poids propre s'ajoute une surcharge que l'on suppose également répartie dans la longueur de la travée.

Il est facile de déterminer le nombre total des hypothèses que l'on peut faire sur la distribution des surcharges pour un nombre n de travées.

Si d'abord on suppose qu'une travée seulement reçoive la surcharge, on doit compter n hypothèses distinctes, chaque travée pouvant être successivement celle à laquelle elle est attribuée. Si l'on suppose ensuite deux travées chargées, le nombre d'hypothèses correspondantes est égal au nombre de manières distinctes qu'il y a de prendre deux objets sur une collection de n objets, c'est-à-dire à $\frac{n(n-1)}{2}$; de même pour trois travées chargées, le nombre d'hypothèses est égal au nombre $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}$ des combinaisons de n objets pris trois à trois, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on suppose les n travées chargées, ce qui ne peut se faire que d'une seule manière. Le nombre total des hypothèses dis-

tinctes est donc égal à la somme :

$$n + \frac{n(n-1)}{1\times 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3} + \ldots + 1,$$

ou à $2^n - 1$; l'unité qu'on retranche à 2^n correspond à l'hypothèse dans laquelle toutes les travées seraient vides, hypothèse écartée *à priori*.

Lorsque la poutre est symétrique par rapport au milieu de sa longueur totale, un certain nombre d'hypothèses se groupent deux à deux symétriquement, et l'une n'est que la reproduction de l'autre. Il y a dans ce cas une réduction du nombre des hypothèses réellement distinctes au point de vue du constructeur.

Voici comment on peut déterminer ce nombre réduit.

Soit $N = 2^n - 1$ le nombre total d'hypothèses à faire sur les n travées d'une poutre symétrique, lorsqu'on ne tient pas compte de la symétrie Ces N hypothèses se partagent en deux classes. La première comprend N' ***hypothèses non symétriques***, et la seconde N'' ***hypothèses symétriques***. Chaque hypothèse de la première classe a, en vertu de la symétrie de la poutre, une hypothèse symétrique distincte d'elle-même ; par suite les N' hypothèses de la première classe ne donnent que $\frac{1}{2}$ N' hypothèses distinctes quand on tient compte de la symétrie. Au contraire, la seconde classe ne subit aucune réduction par suite de la symétrie de la poutre ; car chaque hypothèse étant symétrique d'elle-même ne se groupe avec aucune autre qui soit comptée séparément dans le nombre N''.

Si donc nous représentons par N_s le nombre des hypothèses distinctes lorsqu'on tient compte de la symétrie, nous avons à la fois :

$$N = N' + N'',$$

et

$$N_s = \frac{1}{2} N' + N'';$$

d'où l'on tire en éliminant N',

$$N_s = \frac{1}{2}(N + N'').$$

N est connu ; il suffit donc de déterminer N''. Deux cas doivent être distingués ici, suivant que n est impair ou pair.

1° Si n est impair, la poutre a une travée centrale de chaque côté de laquelle sont $\frac{n-1}{2}$ travées.

Soit μ le nombre de travées chargées dans une certaine hypothèse. Pour que la distribution soit symétrique, il faudra, si μ est pair, qu'il y ait $\frac{\mu}{2}$ travées chargées de chaque côté de la travée centrale ; le nombre d'*hypothèses symétriques* est donc égal dans ce cas particulier au nombre de combinaisons de $\frac{n-1}{2}$ objets pris $\frac{\mu}{2}$ à $\frac{\mu}{2}$. Si μ est impair, il faudra que la travée centrale soit chargée, et qu'en outre il y ait $\frac{\mu-1}{2}$ travées chargées dans chaque moitié de la poutre ; le nombre d'hypothèses symétriques est donc alors égal au nombre de combinaisons de $\frac{n-1}{2}$ objets pris $\frac{\mu-1}{2}$ à $\frac{\mu-1}{2}$.

Ainsi pour une valeur paire de μ, le nombre d'*hypothèses symétriques* est donné par la formule connue :

$$C_{\frac{n-1}{2},\frac{\mu}{2}} = \frac{\frac{n-1}{2} \times \frac{n-3}{2} \times \frac{n-5}{2} \times \ldots \times \frac{n-\mu+1}{2}}{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times \frac{\mu}{2}},$$

et pour une valeur impaire de μ, il est donné par la formule :

$$C_{\frac{n-1}{2},\frac{\mu-1}{2}} = \frac{\frac{n-1}{2}\times\frac{n-3}{2}\times\frac{n-5}{2}\times\ldots\times\frac{n-\mu+2}{2}}{1\times 2\times 3\times\ldots\times\frac{\mu-1}{2}}.$$

Pour obtenir le nombre total N″ d'hypothèses symétriques, on fera successivement $\mu = 2, 4, 6, \ldots n-1$ dans la première formule, et $\mu = 1, 3, 5, \ldots n$ dans la seconde, et on ajoutera les résultats. On remarquera que la seconde formule donnera

pour $\mu = 3, \quad 5, \quad 7\ldots\ldots, \quad n,$

les mêmes résultats que la première

pour $\mu = 2, \quad 4, \quad 6\ldots\ldots, \quad n-1.$

en définitive on aura :

$$N'' = 1 + \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} + \frac{\frac{n-1}{2}\times\frac{n-3}{2}}{1\times 2} + \frac{\frac{n-1}{2}\times\frac{n-3}{2}}{1\times 2} +$$

$$+\ldots+\frac{\frac{n-1}{2}\times\frac{n-3}{2}\times\ldots\times 1}{1\times 2\times\ldots\times\frac{n-1}{2}} + \frac{\frac{n-1}{2}\times\frac{n-3}{2}\times\ldots\times 1}{1\times 2\times\ldots\times\frac{n-1}{2}} =$$

$$= 1 + \left(\frac{n-1}{2} + \frac{\frac{n-1}{2}\times\frac{n-3}{2}}{1\times 2} + \ldots\ldots + 1\right)\times 2 =$$

$$= 1 + (2^{\frac{n-1}{2}} - 1)\times 2 = 2^{\frac{n+1}{2}} - 1.$$

Donc enfin :

$$N_s = \frac{1}{2}(N + N'') = 2^{n-1} + 2^{\frac{n-1}{2}} - 1.$$

2° Si n est pair, il n'y a pas de travée centrale, mais il y a $\frac{n}{2}$ travées symétriques par rapport à l'appui du milieu

de la poutre. Dans ce cas, toute hypothèse comprenant un nombre impair de travées chargées est nécessairement non symétrique. On ne doit donc chercher les diverses parties du nombre N″ qu'en attribuant à μ des valeurs paires. Le nombre d'hypothèses symétriques pour une valeur particulière de μ est égal au nombre $C_{\frac{n}{2},\frac{\mu}{2}}$ de combinaisons de $\frac{n}{2}$ objets $\frac{\mu}{2}$ à $\frac{\mu}{2}$, ou bien à l'expression :

$$\frac{\frac{n}{2}\times\frac{n-2}{2}\times\frac{n-4}{2}\times\ldots\times\frac{n-\mu+2}{2}}{1\times2\times3\times\ldots\times\frac{\mu}{2}}.$$

N″ s'obtiendra donc en faisant la somme des valeurs successives que prend cette expression quand on y fait $\mu=2$, $\mu=4$, ... $\mu=n$.

On trouve :

$$N''=\frac{n}{2}+\frac{\frac{n}{2}\times\frac{n-2}{2}}{1\times2}+\frac{\frac{n}{2}\times\frac{n-2}{2}\times\frac{n-4}{2}}{1\times2\times3}+\ldots+1=$$

$$=2^{\frac{n}{2}}-1,$$

et par suite :

$$N_s=\frac{1}{2}(N+N'')=2^{n-1}+2^{\frac{n-2}{2}}-1,$$

On forme ainsi le tableau suivant :

NOMBRE de travées.	NOMBRE TOTAL d'hypothèses distinctes	
	pour une poutre quelconque.	pour une poutre symétrique.
n.	N.	N_s.
2	3	2
3	7	5
4	15	9
5	31	19
6	63	35
7	127	71
8	255	135

Les deux formules qui donnent N_s peuvent se fondre en une seule, en observant que $\frac{n-1}{2}$, quand n est impair, et $\frac{n-2}{2}$, quand n est pair, sont les *valeurs entières les plus approchées par défaut* de la moitié de $n-1$; la notation connue $E(x)$ désignant le plus grand entier contenu dans le nombre x, on pourra poser d'une manière générale :

$$N_s = 2^{n-1} + 2^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} - 1.$$

Les hypothèses distinctes à faire sur la distribution des surcharges sont encore, même après la réduction due à la symétrie de la poutre, en très-grand nombre par une valeur de n médiocrement grande. Mais il n'est pas nécessaire de les faire toutes pour déterminer les plus grands efforts auxquels la matière sera soumise dans les diverses sections de la pièce. On est amené ainsi à se poser cette question : *Parmi les diverses hypothèses distinctes que l'on peut faire sur la distribution des surcharges entre les* n *travées d'une*

poutre, quelle est celle qui correspond à la plus grande valeur absolue du moment fléchissant dans telle section de telle travée ?

Nous allons chercher la solution de cette question en commençant par en traiter un cas particulier important.

§ 2. *Théorème sur le maximum du moment fléchissant sur un appui déterminé.*

Pour distinguer dans l'équation qui donne M_k les charges de chaque travée prise individuellement, nous poserons d'une manière générale : $R_h = \frac{1}{4} p_h l_h^3$, ce qui permettra de substituer aux expressions

$$P_2, \quad P_3, \quad P_4, \quad \ldots \quad P_k, \quad \ldots \quad P_n,$$

les sommes

$$R_1+R_2, \quad R_2+R_3, \quad R_3+R_4, \quad \ldots \quad R_{k-1}+R_k \quad \ldots \quad R_{n-1}+R_n,$$

dans lesquelles les quantités R représentent des fonctions connues des charges des diverses travées. Il vient en introduisant cette notation nouvelle dans la formule qui fait connaître M_k :

$$M_k = \frac{\begin{array}{l}\alpha_{n-k}[R_1+R_2(1+\gamma_1)+R_3(\gamma_1+\gamma_2)+\ldots+R_{k-1}(\gamma_{k-3}+\gamma_{k-2})]+\\ +\gamma_{k-2}[R_k(\alpha_{n-k}+\alpha_{n-k-1})+R_{k+1}(\alpha_{n-k-1}+\alpha_{n-k-2})+\ldots+R_n]\end{array}}{l_1\alpha_{n-1}}.$$

Or nous avons déjà observé que les coefficients des R dans chaque grande parenthèse,

$$1, \quad 1+\gamma_1, \quad \gamma_1+\gamma_2, \quad \ldots \quad \gamma_{k-3}+\gamma_{k-2}, \quad \alpha_{n-k}+\alpha_{n-k-1}, \quad \ldots \quad \alpha_1+1, \quad 1,$$

ont le même signe que les nombres :

$$1, \quad \gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \ldots \quad \gamma_{k-2}, \quad \alpha_{n-k}, \quad \ldots \quad \alpha_1, \quad 1.$$

et par suite les coefficients des R dans la valeur de M_k ont

le signe des nombres :

$$\frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_{n-1}},\quad \frac{\gamma_1\alpha_{n-k}}{\alpha_{n-1}},\quad \frac{\gamma_2\alpha_{n-k}}{\alpha_{n-1}},\quad \ldots\ \frac{\gamma_{k-2}\alpha_{n-k}}{\alpha_{n-1}},\quad \frac{\alpha_{n-k}\gamma_{k-2}}{\alpha_{n-1}},\quad \ldots\ \frac{\alpha_1\gamma_{k-2}}{\alpha_{n-1}},\quad \frac{\gamma_{k-2}}{\alpha_{n-1}},$$

c'est-à-dire le signe + ou le signe —, suivant que la somme des indices

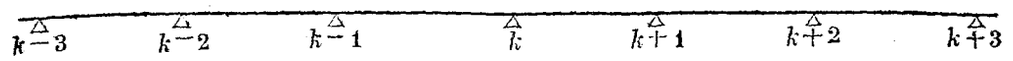
$$2n-k-1,\ 2n-k,\ 2n-k+1,\ \ldots\ 2n-3,\quad 2n-3,\ \ldots\ n+k-2, n+k-3,$$

est paire ou impaire.

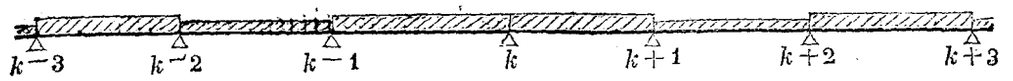
On voit sur le champ que R_{k-1} et R_k auront tous deux des coefficients négatifs ; que R_{k-2} et R_{k+1} auront des coefficients positifs, puis R_{k-3} et R_{k+2} des coefficients négatifs, et ainsi de suite alternativement jusqu'aux deux bouts de la poutre. La série des signes des coefficients des R dans la formule qui donne M_k présente une suite de variations jusqu'au coefficient de R_{k-1}, qui est toujours négatif, une permanence de R_{k-1} à R_k, puis une suite de variations jusqu'au coefficient de R_n.

M_k est toujours négatif. Le maximum de sa valeur absolue correspond donc à l'hypothèse dans laquelle on suppose chargées les travées dont les poids sont pris négativement dans les formules, et vides les autres travées, c'est-à-dire que le maximum de la valeur absolue de M_k correspond à l'hypothèse dans laquelle on charge les travées n° $(k-1)$ et n° (k) qui portent toutes deux sur l'appui considéré, puis toutes les travées de deux en deux à partir de celles-là, c'est-à-dire les travées n° $(k-3)$, n° $(k-5)$, ... d'un côté de l'appui n° k, et n° $(k+2)$, n° $(k+4)$, ... de l'autre côté, les travées n° $(k-2)$, n° $(k-4)$, ... et n° $(k+1)$, n° $(k+3)$, ... ne recevant pas de surcharge.

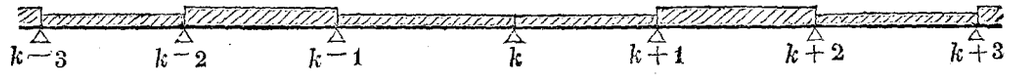
On voit du même coup que le minimum de M_k correspond à l'hypothèse inverse. Soit par exemple le fragment suivant de la distribution des appuis sous une poutre continue indéfinie :



L'hypothèse qui donnera le maximum du moment fléchissant, en valeur absolue, sur l'appui n° (k) sera représentée par le diagramme :



et l'hypothèse correspondante au minimum, par le diagramme :



Ces deux hypothèses sont *complémentaires* l'une de l'autre; si l'on additionne deux valeurs du moment fléchissant en un même point correspondantes à chacune de ces deux hypothèses, on obtient la valeur qu'aurait le moment fléchissant en ce point, si chaque travée recevait une surcharge égale à la somme de la surcharge admise et du poids propre de la travée.

§ 3. *Recherche de l'influence de la charge d'une travée sur le moment fléchissant en un point quelconque de la poutre.*

On connaît par le théorème précédent les hypothèses qui conduisent aux maxima et aux minima des moments sur les appuis pris en valeur absolue. Il reste à étudier ce qui se passe dans une travée quelconque, définie par son numéro, k.

Nous reprendrons la formule :

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{M}_k (l_k - x) + \mathbf{M}_{k+1}\, x}{l_k} + \frac{1}{2}\, p_k\, x (l_k - x),$$

au moyen de laquelle on trace la parabole des moments dans la travée considérée, mais pour en faire l'application, nous remarquerons qu'il suffit de supposer successivement nulles les charges de toutes les travées moins une, et d'ajouter, en tenant compte des signes, les *moments partiels* qui correspondent pour un même point donné à chacune de ces hypothèses. Ce procédé fera connaître l'influence de la charge de chaque travée sur la répartition des moments dans une travée déterminée.

Soit t le numéro de la travée qui demeure seule pesante, toutes les autres étant réduites par la pensée à avoir un poids nul. Trois cas sont à distinguer suivant que t est inférieur, égal ou supérieur à k.

Premier cas. $t < k$.

Dans ce cas, la travée dont on conserve le poids dans les formules qui font connaître M_k et M_{k+1}, étant à gauche des appuis n° (k) et n° $(k+1)$ pour lesquels on demande les moments, R_t se trouvera dans la première grande parenthèse des valeurs générales de ces moments, et effaçant tous les autres R, on aura :

$$M_k = \frac{\alpha_{n-k} R_t (\gamma_{t-2} + \gamma_{t-1})}{l_1 \alpha_{n-1}}$$

et

$$M_{k+1} = \frac{\alpha_{n-k-1} R_t (\gamma_{t-2} + \gamma_{t-1})}{l_1 \alpha_{n-1}}.$$

Substituons dans la formule qui donne M et observons que p_k est supposé égal à zéro. Il vient pour le *moment partiel* :

$$M = \frac{R_t (\gamma_{t-2} + \gamma_{t-1})}{l_1 l_k \alpha_{n-1}} [\alpha_{n-k} l_k - (\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k-1}) x].$$

Le moment partiel dû à la charge de la travée n° (t) est donc représenté par les ordonnées d'une droite qui coupe

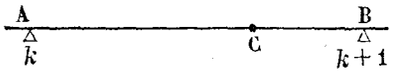
l'axe des abscisses en un point C appartenant à la travée n° (k) ; en effet l'équation :

$$\alpha_{n-k} l_k - (\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k-1})\, x = 0$$

donne :

$$x = \frac{\alpha_{n-k} l_k}{\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k-1}},$$

résultat positif et moindre que l_k, puisque $\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k-1}$ a le signe de α_{n-k} avec une valeur absolue plus grande, et de plus, résultat indépendant du numéro t de la travée dont on cherche l'influence, de sorte que toutes les droites qui représentent les moments partiels dus aux poids des travées situées à gauche de la travée n° (k) coupent l'axe des abscisses en un même point. Le moment partiel change donc de signe de part et d'autre de ce point. A gauche, il a le même signe que pour $x = 0$, c'est-à-dire le signe du produit :

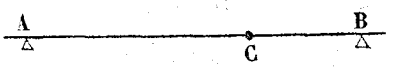


$$\frac{\gamma_{t-2} + \gamma_{t-1}}{\alpha_{n-1}} \times \alpha_{n-k},$$

lequel est positif si la somme $n - 1 + t - 1 + n - k = 2n - 2 + t - k$ est paire, négatif si elle est impaire. Le moment partiel à gauche du point C est donc négatif si $k - t$ est impair et positif dans le cas contraire. Les signes contraires ont lieu à droite du point C. Convenons d'appeler *travées positives*, relativement à un tronçon AC de la travée AB, celles dont les charges donnent des moments partiels positifs dans ce tronçon; nous résumerons dans un tableau très-simple les résultats de l'analyse du premier cas.

Influence des travées à gauche de l'appui k :

$$AC = \frac{\alpha_{n-k} l_k}{\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k-1}}.$$



TRONÇON AC.		TRONÇON CB.	
Travées positives.	Travées négatives.	Travées positives.	Travées négatives.
N° $k-2$	N° $k-1$	N° $k-1$	N° $k-2$
$k-4$	$k-3$	$k-3$	$k-4$
$k-6$	$k-5$	$k-5$	$k-6$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Second cas. $t > k$.

On ne conservera dans les formules qui donneront M_k et M_{k+1} que le seul terme en R_t, lequel se trouvera dans la seconde grande parenthèse, et il viendra, par un calcul tout semblable à celui qui a été développé tout à l'heure :

$$M = \frac{R_t(\alpha_{n-t} + \alpha_{n-t-1})}{l_1 l_k \alpha_{n-1}} [\gamma_{k-2} l_k + (\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}) x].$$

L'équation du moment partiel représente encore une droite qui coupera l'axe des abscisses en un point D défini par l'équation :

$$\gamma_{k-2} l_k + (\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}) x = 0,$$

ce qui donne :

$$x = - \frac{\gamma_{k-2} l_k}{\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}}.$$

Le résultat est positif et moindre que l_k, de sorte que le point D appartient à la travée AB ; on peut faire voir de plus qu'il est situé entre le point C et le point A, ce qui revient à démontrer l'inégalité :

$$\frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k-1}} > -\frac{\gamma_{k-2}}{\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}}.$$

Supposons d'abord n impair ; $\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k-1}$ et $\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}$ ayant respectivement les signes de α_{n-k} et de γ_{k-1}, le produit $(\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k-1})(\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2})$ a le signe du produit $\alpha_{n-k}\gamma_{k-1}$, c'est-à-dire le signe $+$, puisque la somme $n - 1$ des indices est paire. Donc, on n'altère pas l'inégalité précédente en en multipliant les deux membres par le produit des dénominateurs, ce qui donne :

$$\alpha_{n-k}\gamma_{k-1} - \alpha_{n-k}\gamma_{k-2} > -\alpha_{n-k}\gamma_{k-2} + \alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2},$$

ou bien, en supprimant le terme $-\alpha_{n-k}\gamma_{k-2}$ commun aux deux membres :

$$\alpha_{n-k}\gamma_{k-1} > \alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2},$$

ou encore

$$\alpha_{n-k}\gamma_{k-1} - \alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2} > 0;$$

inégalité évidente, car on a toujours $l_k(\alpha_{n-k}\gamma_{k-1} - \alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2}) = l_1\alpha_{n-1}$, nombre positif si n est impair.

Si n est pair, il faudrait renverser l'inégalité à vérifier, en même temps qu'on chasse les dénominateurs, parce que leur produit serait négatif; mais α_{n-1} serait aussi négatif, et par suite la conclusion définitive serait la même.

La position du point D est, comme celle du point C, indépendante du numéro de la travée à laquelle on attribue la charge. On peut remarquer aussi que la distance DC est égale à

$$l_k\left(\frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k-1}} + \frac{\gamma_{k-2}}{\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}}\right) = \frac{l_k(\alpha_{n-k}\gamma_{k-1} - \alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2})}{(\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k-1})(\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2})} =$$

$$= \frac{l_1\alpha_{n-1}}{(\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k-1})(\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2})};$$

c'est-à-dire au quotient de la division du dénominateur commun des valeurs des moments sur les appuis, par les produits des différences des deux termes des séries (α) et (γ) qui correspondent aux deux appuis comprenant la travée, expression toujours positive.

Les travées à droite de l'appui n° $(k+1)$ seront négatives de deux en deux par rapport au tronçon BD, à partir de la travée n° $(k+1)$ et positives de deux en deux par rapport au même tronçon à partir de la travée n° $(k+2)$; et nous pouvons par suite former le tableau qui résume le deuxième cas :

$$AD = -\frac{\gamma_{k-2}}{\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}} l_k .$$

TRONÇON AD.		TRONÇON DB.	
Travées positives.	Travées négatives.	Travées positives.	Travées négatives.
N° $(k+1)$	N° $(k+2)$	N° $(k+2)$	N° $(k+1)$
$(k+3)$	$(k+4)$	$(k+4)$	$(k+3)$
$(k+5)$	$(k+6)$	$(k+6)$	$(k+5)$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Troisième cas. $t = k$.

Nous n'avons à conserver ici que le terme en R_k dans les valeurs générales de M_k et de M_{k+1}, et ce terme se trouvera dans la seconde grande parenthèse pour M_k, dans la première pour M_{k+1} ; enfin, nous pouvons remplacer R_k par sa valeur $\frac{1}{4} p_k l_k^3$; il viendra :

$$M_k = \frac{1}{4} p_k l_k^3 \frac{\gamma_{k-2}(\alpha_{n-k} + \alpha_{n-k-1})}{l_1 \alpha_{n-1}}.$$

$$M_{k+1} = \frac{1}{4} p_k l_k^3 \frac{\alpha_{n-k-1}(\gamma_{k-2} + \gamma_{k-1})}{l_1 \alpha_{n-1}}$$

Le moment partiel M se compose dans la travée n° k de deux parties : l'une est donnée par l'ordonnée négative de la droite :

$$y = M_{k+1} \frac{x}{l_k} + M_k \frac{l_k - x}{l_k},$$

l'autre par l'ordonnée positive de la parabole :

$$z = \frac{1}{2} p_k x (l_k - x).$$

Pour $x = 0$, on a $z = 0$ et $y = M_k$, quantité négative. M est donc négatif.

Faisons ensuite :

$$x = - \frac{\gamma_{k-2}}{\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}} l_k ;$$

il viendra :

$$y = \frac{\frac{1}{4} p_k l_k^3}{l_1 \alpha_{n-1}} \times \left[\alpha_{n-k-1}(\gamma_{k-2} + \gamma_{k-1}) \times \left(- \frac{\gamma_{k-2}}{\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}} \right) + \right.$$
$$\left. + \gamma_{k-2}(\alpha_{n-k} + \alpha_{n-k-1}) \times \frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}} \right].$$

$$= \frac{\frac{1}{4} p_k l_k^2 \gamma_{k-2}}{\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}} \left[\frac{l_k \times (\alpha_{n-k} \gamma_{k-1} - \alpha_{n-k-1} \gamma_{k-2})}{l_1 \alpha_{n-1}} \right]$$

$$= \frac{1}{4} p_k l_k^2 \frac{\gamma_{k-2}}{\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}}$$

et

$$z = \frac{1}{2} p_k l_k^2 \frac{- \gamma_{k-2} \gamma_{k-1}}{(\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2})^2}.$$

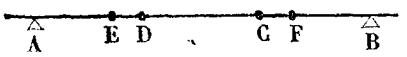
Donc

$$M = z + y = \frac{1}{4} p_k l_k^2 \times \frac{-\gamma_{k-2}(\gamma_{k-1} + \gamma_{k-2})}{(\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2})^2},$$

quantité toujours positive, car $\gamma_{k-1} + \gamma_{k-2}$ a le signe de γ_{k-1}, et le produit $-\gamma_{k-1}\gamma_{k-2}$ est toujours positif.

Donc M passe du négatif au positif quand x passe de zéro à la valeur AD ; on prouverait de même que M passe du positif au négatif quand x passe de la valeur AC à la valeur AB.

La parabole qui représente dans la travée n° k le moment partiel correspondant à la charge de la travée n° k elle-même, coupe donc l'axe des abscisses en deux points E et F, l'un compris entre A et D, l'autre entre C et B.



La travée n° k est négative relativement aux tronçons AE, FB, et positive relativement au tronçon EF.

On peut réunir dans un tableau l'indication des influences positives ou négatives des travées sur les cinq tronçons AE, ED, DC, CF, FB, dans lesquels nous venons de partager la travée AB.

INFLUENCE.	TRONÇON AE.		TRONÇON ED.		TRONÇON DC.		TRONÇON CF.		TRONÇON FB.	
	positive.	négative.	positive.	négative.	positive.	négative.	positive.	négative.	positive.	négative.
Des travées à gauche de l'appui n° k.	travées. n° $k-2$	travées. n° $k-1$	travées. n° $k-2$	travées. n° $k-1$	travées. n° $k-2$	travées. n° $k-1$	travées. n° $k-1$	travées. n° $k-2$	travées. n° $k-1$	travées. n° $k-2$
	$k-4$	$k-3$	$k-4$	$k-3$	$k-4$	$k-3$	$k-3$	$k-4$	$k-3$	$k-4$
	$k-6$	$k-5$	$k-6$	$k-5$	$k-6$	$k-5$	$k-5$	$k-6$	$k-5$	$k-6$
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
De la travée n° k.	»	n° k	n° k	»	n° k	»	n° k	»	»	n° k
Des travées à droite de l'appui n° $(k+1)$.	n° $k+1$	n° $k+2$	n° $k+1$	n° $k+2$	n° $k+2$	n° $k+1$	n° $k+2$	n° $k+1$	n° $k+2$	n° $k+1$
	$k+3$	$k+4$	$k+3$	$k+4$	$k+4$	$k+3$	$k+4$	$k+3$	$k+4$	$k+3$
	$k+5$	$k+6$	$k+5$	$k+6$	$k+6$	$k+5$	$k+6$	$k+5$	$k+6$	$k+5$
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Pour résumer ce tableau on observera que :

Les travées $\left\{\begin{array}{l}\text{n° } k-1,\ k-3, k-5,\ \ldots \\ \text{n° } k,\ k+2,\ k+4, k+6,\ \ldots\end{array}\right\}$ sont toujours *négatives* relativement au tronçon AE voisin du point A ;

Les travées $\left\{\begin{array}{l}\text{n° } k-2, k-4,\ k-6,\ \ldots \\ \text{n° } k, \\ \text{n° } k+2, k+4,\ k+6,\ \ldots\end{array}\right\}$ sont toujours *positives* relativement au tronçon central DC ;

Enfin les travées $\left\{\begin{array}{l}\text{n° } k,\ k-2, k-4,\ k-6,\ \ldots \\ \text{n° } k+1,\ k+3,\ k+5,\ \ldots\end{array}\right\}$ sont toujours *négatives* relativement au tronçon FB voisin du point B.

Le tronçon ED suit une loi inverse du tronçon FB, et le tronçon CF une loi inverse du tronçon AE.

Les moments fléchissants sont négatifs près des appuis A et B ; ils deviennent généralement positifs vers le centre de la travée, à moins qu'elle ne soit extrêmement courte par rapport aux autres, ce qui serait un vice de construction qu'on évite soigneusement dans la pratique. Partout ailleurs on ne connaît pas d'avance les signes des moments fléchissants. Dans ces conditions, on aura leurs plus grandes valeurs absolues en attribuant successivement la surcharge aux travées négatives seules, puis aux travées positives seules ; car le moment total M en un point donné étant la somme algébrique des moments partiels afférents à toutes les charges, sa plus grande valeur absolue, dans un quelconque des tronçons, correspond à l'hypothèse qui attribue la plus grande charge aux travées qui ont le même signe que M, et la moindre charge aux travées qui ont un signe contraire. Nous pouvons déterminer maintenant le nombre d'hypothèses à faire pour trouver les maxima des moments fléchissants en tout point de la poutre.

Considérons une travée centrale. Il y a d'abord deux hypothèses, complémentaires l'une de l'autre, qui feront con-

naître les maxima dans le tronçon AE; ce sont les hypothèses qui correspondent au maximum et au minimum du moment sur cet appui. Les mêmes hypothèses font connaître les maxima dans le tronçon CF.

Il y a de même deux hypothèses complémentaires, distinctes des premières, pour le tronçon FB et pour le tronçon ED.

Enfin deux hypothèses complémentaires, encore distinctes, doivent être faites pour le tronçon central DC.

En tout, six hypothèses par travée centrale.

Mais sur ces six hypothèses, les quatre premières sont communes à la travée considérée et aux deux travées voisines; elles appartiennent en réalité aux appuis communs; les deux dernières s'appliquent à la fois à toutes les travées.

n étant donc le nombre des travées, $n-1$ est le nombre des appuis communs à deux travées successives; le nombre total d'hypothèses utiles est donc égal à $2+\frac{4(n-1)}{2}=$ $2+2n-2=2n$.

Cette formule suppose $n>2$; car pour $n=2$, il n'y a pas de travée centrale.

Si la poutre est symétrique, ce nombre $2n$ se réduit encore. En effet, si n est impair, les $2(n-1)$ hypothèses correspondantes au maximum et au minimum du moment sur les appuis sont toutes non symétriques; elles se réduisent donc à $n-1$ hypothèses distinctes quand on tient compte de la symétrie; il faut y ajouter les deux hypothèses qui donnent à la fois le maximum et le minimum dans le tronçon central de chaque travée; ce qui fait en tout $n-1+2=n+1$.

Si n est pair, parmi les $2(n-1)$ premières hypothèses, il y en a deux symétriques, ce sont celles qui appartiennent à l'appui du centre de la poutre; tandis que les deux hypothèses communes à toutes les travées, sont non-symétriques, et l'une est la répétition de l'autre. Le nombre ré-

duit d'hypothèses est donc égal à $\frac{2(n-2)}{2} + 2 + \frac{2}{2}$ ou à $n+1$, que n soit pair ou impair.

§ 4. *Indication d'une méthode approximative plus rapide.*

Les hypothèses auxquelles nous avons été conduits par les recherches qui précèdent correspondent à des charges discontinues. Or il est rare que dans la pratique, il y ait discontinuité dans la distribution des surcharges. Certains constructeurs se contentent de faire les hypothèses suivantes. Ils supposent d'abord une surcharge continue appliquée à toute l'étendue de la poutre, et cette supposition leur fait connaître les plus grandes valeurs admissibles pour les moments fléchissants sur les appuis; puis ils chargent successivement chaque travée à l'exclusion de toutes les autres, et ils prennent le résultat pour le maximum correspondant au moment fléchissant dans la travée. Pour les calculs de ces moments, on peut employer des formules approximatives au lieu des formules exactes.

CHAPITRE V.

APPLICATIONS DIVERSES.

§ 1.

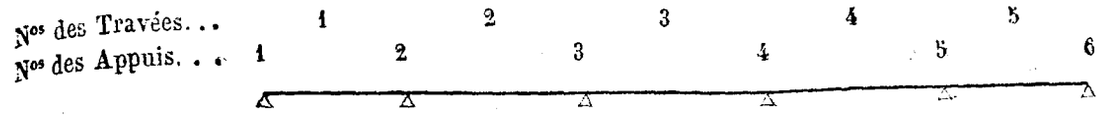
On propose d'appliquer les calculs précédents à une poutre droite franchissant 5 portées, les deux extrêmes de 40 mètres, et les trois centrales de 50 mètres, ces dimensions étant prises d'axe en axe des appuis successifs.

Le poids propre p' par mètre courant de la poutre est supposé de 1,500 kilogrammes.

La surcharge p'', de 2,000.

Le poids p par mètre courant de travée chargée est donc $1500 + 2000 = 3500$.

1° Calcul des coefficients (α) et (γ).



Portées.	40m	50m	50m	50m	40m	
Série (α).	$\alpha_4=208{,}25$	$\alpha_3=-50$	$\alpha_2=13{,}4$	$\alpha_1=-3{,}6$	$\alpha_0=1$	0
Série (γ).	0	$\gamma_0=1$	$\gamma_1=-3{,}6$	$\gamma_2=13{,}4$	$\gamma_3=1$	$\gamma_4=208{,}25$

$$\alpha_1=\gamma_1=-2\left(1+\frac{40}{50}\right)=-3{,}60,$$

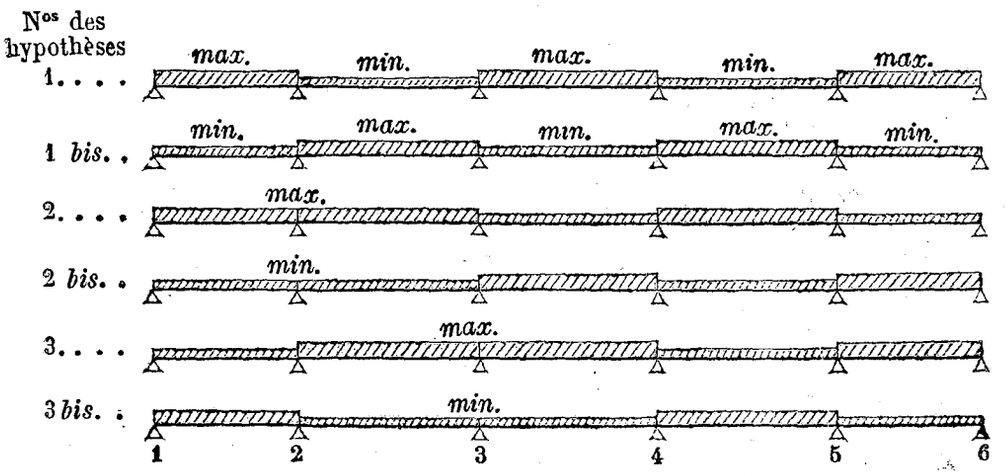
$$\alpha_2=\gamma_2=-2\times(-3{,}6)\times\left(1+\frac{50}{50}\right)-\frac{50}{50}=13{,}40,$$

$$\alpha_3=\gamma_3=-2\times(13{,}4)\left(1+\frac{50}{50}\right)-(-3{,}6)\times\frac{50}{50}=-50.00,$$

$$\alpha_4=\gamma_4=-2\times(-50)\left(1+\frac{50}{40}\right)-13{,}4\times\frac{50}{40}=208.25.$$

Dénominateur commun des valeurs des moments sur les appuis : $40\times208{,}25=+8330$.

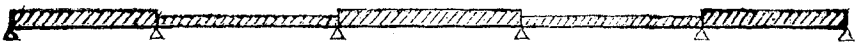
2° Hypothèses à faire sur la distribution des surcharges entre les travées.



3° Préparation du calcul des quantités P_2, P_3, P_4, P_5.

	TRAVÉES DE RIVE $l=40$.	TRAVÉES CENTRALES $l=50$.
Travées vides.	$\frac{1}{4}p'l^3=24\,000\,000$	46875000
Travées surchargées.	$\frac{1}{4}pl^3=56\,000\,000$	109375000

Hypothèse n° 1.



$$\begin{cases} P_2 = 56\,000\,000 + 46\,875\,000 = 102\,875\,000. \\ P_3 = 46\,875\,000 + 109\,375\,000 = 156\,250\,000. \\ P_4 = P_3 = 156\,250\,000. \\ P_5 = P_2 = 182\,875\,000. \end{cases}$$

Moments sur les appuis.

$$\begin{cases} M_2 = \dfrac{P_2\alpha_3 + P_3\alpha_2 + P_4\alpha_1 + P_5}{8330} = -\,421\,100 \text{ kilogrammètres.} \\ M_3 = \dfrac{\alpha_2 P_2 + \gamma_1(P_3\alpha_2 + P_4\alpha_1 + P_5)}{8330} = -\,540\,760^{km}. \\ M_4 = M_3 = -\,540\,760^{km}. \\ M_5 = M_2 = -\,421\,100^{km}. \end{cases}$$

Efforts tranchants.

$$\begin{cases} A_1 = -B_5 = \frac{1}{2} \times 3500 \times 40 + \dfrac{M_2}{40} = 70\,000^{kg} - \dfrac{421\,100}{40} = 59472^{kg} \text{ pression sur les appuis extrêmes.} \\ A_2 = -B_4 = \frac{1}{2} \times 1500 \times 50 + \dfrac{M_3 - M_2}{50} = 37\,500 - \dfrac{119660}{50} = 35\,106, \\ A_3 = -B_3 = \frac{1}{2} \times 3500 \times 50 + \dfrac{M_4 - M_3}{50} = 87\,500, \\ A_4 = -B_2 = \frac{1}{2} \times 1500 \times 50 + \dfrac{M_5 - M_4}{50} = 37\,500 + \dfrac{119660}{50} = 39893, \\ A_5 = -B_1 = \frac{1}{2} \times 3500 \times 50 - \dfrac{M_5}{50} = 70\,000 + \dfrac{421\,100}{40} = 80\,527. \end{cases}$$

Pression totale sur les appuis intermédiaires.

$$\begin{cases} F_2 = -B_1 + A_2 = 115\,634^{kg}, \\ F_3 = -B_2 + A_3 = 127\,393, \\ F_4 = 127\,393, \\ F_5 = 115\,634. \end{cases}$$

Hypothèse n° 1 bis (complémentaire de la précédente).

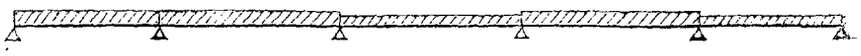
$$\begin{cases} P_2 = 133\,375\,000, \\ P_3 = 156\,250\,000, \\ P_4 = 156\,250\,000, \\ P_5 = 133\,375\,000. \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_2 = -\,600\,774^{km} \\ M_3 = -\,504\,853 \\ M_4 = -\,504\,853 \\ M_5 = -\,600\,774. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = -B_5 = 14980^{kg}.7 \\ A_2 = -B_4 = 68315\ .8 \\ A_3 = -B_3 = 37500\ .0 \\ A_4 = -B_2 = 106684\ .2 \\ A_5 = -B_1 = 45019\ .2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_2 = 113335^{kg}.7 \\ F_3 = 144184\ .2 \\ F_4 = 144184\ .2 \\ F_5 = 113335\ .1. \end{cases}$$

Hypothèse n° 2.



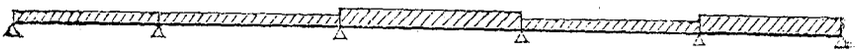
$$\begin{cases} P_2 = 165375000 \\ P_3 = 156250000 \\ P_4 = 156250000 \\ P_5 = 133375000. \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_2 = -792812^{km} \\ M_3 = -452763 \\ M_4 = -518683 \\ M_5 = -596894. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = 70000 + \frac{M_2}{40} = 50179^{kg}.7 \text{ (Pression totale sur le premier appui.)} \\ A_2 = 87500 + \frac{M_3 - M_2}{50} = 94300.98 \\ A_3 = 37500 + \frac{M_4 - M_3}{50} = 36181.6 \\ A_4 = 87500 + \frac{M_5 - M_4}{50} = 85935.78 \\ A_5 = 30000 - \frac{M_5}{40} = 44922.3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -B_1 = 70000 - \frac{M_2}{40} = 89820^{kg}.3 \\ -B_2 = 87500 - \frac{M_3 - M_2}{50} = 80699.02 \\ -B_3 = 37500 - \frac{M_4 - M_3}{50} = 38818,4 \\ -B_4 = 87500 - \frac{M_5 - M_4}{50} = 89064.22 \\ -B_5 = 30000 + \frac{M_5}{40} = 15077.7 \text{ (pression totale sur le dernier appui.)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_2 = 184121^{kg}.28 \\ F_3 = 116880\ .62 \\ F_4 = 124754\ .18 \\ F_5 = 133986\ .52. \end{cases}$$

Hypothèse n° 2 bis (complémentair de la précédente).



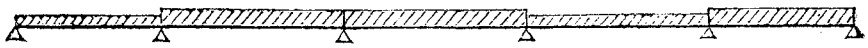
$$\begin{cases} P_2 = 70875000 \\ P_3 = 156250000 \\ P_4 = 156250000 \\ P_5 = 102875000. \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_2 = -229\,148^{km} \\ M_3 = -592\,188 \\ M_4 = -526892 \\ M_5 = -425\,130 \end{cases}$$

$A_1 = 24271^{kg}.3$ pression totale sur le premier appui.	$-B_1 = 35728^{kg}.7$
$A_2 = 30239\ .2$	$-B_2 = 44760\ .8$
$A_3 = 88805\ .9$	$-B_3 = 86\,194\ .1$
$A_4 = 39535\ .2$	$-B_4 = 35464\ .8$
$A_5 = 80628\ .0$	$-B_5 = 59372\ .0$ pression totale sur le dernier appui.

$$\begin{cases} F_2 = 65967^{kg}.9 \\ F_3 = 133\,566\ .7 \\ F_4 = 125729\ .3 \\ F_5 = 116092\ .8. \end{cases}$$

Hypothèse n° 3.



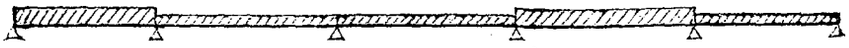
$$\begin{cases} P_2 = 133\,375\,000 \\ P_3 = 218\,750\,000 \\ P_4 = 156\,250\,000 \\ P_5 = 102\,875\,000. \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_2 = -503856^{km} \\ M_3 = -853607 \\ M_4 = -456677 \\ M_5 = -444672. \end{cases}$$

$A_1 = 17403^{kg}.6$ pression totale sur le premier appui.	$-B_1 = 42596^{kg}.4$
$A_2 = 80505\ .0$	$-B_2 = 94495\ .0$
$A_3 = 95438\ .6$	$-B_3 = 79561\ .4$
$A_4 = 37740\ .0$	$-B_4 = 37260\ .0$
$A_5 = 81116\ .8$	$-B_5 = 58883\ .2$ pression totale sur le dernier appui.

$$\begin{cases} F_2 = 123\,101.4 \\ F_3 = 189933.6 \\ F_4 = 117301.4 \\ F_5 = 118376.8. \end{cases}$$

Hypothèse n° 3 bis (complémentaire de la précédente).



$$\begin{cases} P_2 = 102875000 \\ P_3 = 93750000 \\ P_4 = 156250000 \\ P_5 = 133375000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_2 = -518059^{km} \\ M_3 = -192009 \\ M_4 = -588911 \\ M_5 = -576188. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = 57048^{kg}.5 \text{ pression totale sur le premier appui.} \\ A_2 = 44021\ .0 \\ A_3 = 29562\ .0 \\ A_4 = 87754\ .0 \\ A_5 = 44404\ .7 \end{cases} \qquad \begin{cases} -B_1 = 82951^{kg}.5 \\ -B_2 = 30979\ .0 \\ -B_3 = 45438\ .0 \\ -B_4 = 87246\ .0 \\ -B_5 = 15395\ .3 \text{ pression totale sur le dernier appui.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_2 = 126972^{kg}.5 \\ F_3 = 60541\ .0 \\ F_4 = 133192\ .0 \\ F_5 = 131650\ .7. \end{cases}$$

§ 2. *Vérifications.*

1° Si l'on ajoute les deux moments fléchissants obtenus pour un même appui dans deux hypothèses complémentaires, on obtiendra le moment auquel conduirait le calcul pour une charge totale de $2p' + p'' = p + p'$, également répartie dans toute la longueur de la poutre. Pour distinguer les résultats dans les différentes hypothèses, donnons un accent à ceux qui se rapportent à l'hypothèse n° 1 *bis*, deux et trois accents à ceux qui se rapportent aux hypothèses n° 2 et n° 2 *bis*, et enfin quatre et cinq accents à ceux qui correspondent aux hypothèses n° 3 et n° 3 *bis;* nous devrons trouver :

$$M_2 + M'_2 = M''_2 + M'''_2 = M^{IV}_2 + M^{V}_2$$
$$M_3 + M'_3 = M''_3 + M'''_3 = M^{IV}_3 + M^{V}_3$$
$$M_4 + M'_4 = M''_4 + M'''_4 = M^{IV}_4 + M^{V}_4$$
$$M_5 + M'_5 = M''_5 + M'''_5 = M^{IV}_5 + M^{V}_5,$$

ce qui fait une première série de vérifications.

On voit de plus qu'on pourrait se borner à faire quatre hypothèses, savoir : les hypothèses n° 1, n° 2 et n° 3, et l'hypothèse dans laquelle la poutre serait uniformément chargée du poids $p + p'$ par mètre courant ; on obtiendrait ensuite les moments relatifs aux hypothèses n° 1 *bis*, n° 2 *bis* et n° 3 *bis*, par une simple soustraction.

En général, quand n est impair et que la poutre est symétrique, les calculs relatifs aux $n + 1$ hypothèses que l'on doit faire peuvent se simplifier de la même manière, ce qui réduit à $1 + \frac{n+1}{2} = \frac{1}{2}(n+3)$ le nombre réel d'hypothèses à introduire dans les formules.

Si n est pair, il y a encore $n + 1$ hypothèses distinctes ; on en calculera $\frac{n}{2} + 1$, et en outre celle qui correspond à la charge générale $p + p'$; la soustraction donnera $\frac{n}{2} + 1$ résultats, parmi lesquels il y en aura un qui sera symétrique du résultat complémentaire dont on l'a déduit. Le nombre réel d'hypothèses à faire entrer dans les formules est donc alors $\frac{n}{2} + 2 = \frac{1}{2}(n+4)$. Les deux formules rentrent l'une dans l'autre si l'on prend pour le nombre cherché le plus grand entier contenu dans la moitié de $n + 4$.

2° Dans une hypothèse quelconque, la somme

$$A_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 - B_5$$

des pressions exercées sur les appuis est égale au poids de la poutre et de sa surcharge.

Une travée de rive vide pèse 60 000^{kg}, et une travée centrale 75 000^{kg}.

Une travée de rive surchargée pèse 140 000^{kg}, et une travée centrale 175 000^{kg}.

Les poids totaux de la poutre et de la surcharge sont donc :

Dans l'hypothèse :

	kilog.		
N° 1	605 000	} dont la somme est	1 150 000
N° 1 *bis*.	545 000		
N° 2	625 000	} dont la somme est	1 150 000
N° 2 *bis*.	525 000		
N° 3	625 000	} dont la somme est	1 150 000
N° 3 *bis*.	525 000		

On vérifiera à l'aide de ces nombres, si les réactions des appuis satisfont à cette condition. Mais il est facile de voir que cette vérification ne porte pas sur le calcul des moments.

§ 3. *Construction de l'épure des moments fléchissants.*

Après avoir représenté sur le dessin, à une échelle quelconque, les longueurs des travées dont se compose la poutre donnée, on prendra arbitrairement une échelle des hauteurs pour représenter les moments fléchissants. Les ordonnées représenteront des kilogrammètres, et il suffira que l'échelle choisie soit telle que les paraboles correspondantes aux diverses hypothèses ne sortent pas des limites du dessin.

Pour passer des moments fléchissants aux efforts développés dans les bandes horizontales de la poutre, il faut diviser les moments par leur bras de levier, qui est une donnée de la question. Supposons que dans le cas particulier que nous examinons, le bras de levier soit 5 mètres. Supposons en outre que les bandes soient formées de feuilles de tôle de 1^{m}.20 de largeur. On pourra disposer

l'échelle des hauteurs de manière que les ordonnées représentent en vraie grandeur les épaisseurs à attribuer aux tôles, pour que le fer supporte une pression ou une tension de 6 kilogrammes par millimètre carré. En effet chaque millimètre de hauteur sur l'épure représentera dans cette hypothèse une section de $1 \times 1200 = 1200$ millimètres carrés, ou un effort de $1200 \times 6 = 7200$ kilogrammes, ou enfin un moment de $7200 \times 5 = 36000$ kilogrammètres; ces rapports permettent de graduer les échelles des hauteurs qui sont au nombre de quatre : l'échelle des moments, l'échelle des efforts, l'échelle des sections, enfin l'échelle des épaisseurs, laquelle n'est autre chose qu'une échelle de millimètres.

Il sera facile de tracer les paraboles correspondantes à chaque hypothèse; on tracera ensuite les épaisseurs des feuilles de tôle, de manière à dépasser partout le contour limite de ces paraboles. Par exemple, le calcul montrant que 853 600 est la plus grande valeur du moment fléchissant sur un appui, la section minimum correspondante est $\frac{853600}{5 \times 6} = 28453$ millim. quar., et pour une largeur de $1^{m}.20$, il faut une épaisseur de $\frac{28453}{1200} = 23^{mm}.71$. On peut former cette section de trois tôles de 8 millimètres chacune, la section des cornières restant en dehors de ce calcul.

La planche placée à la fin de ce chapitre représente le tracé des paraboles des moments et des polygones discontinus des efforts tranchants.

§ 4. *Partage des travées en tronçons.*

Il est intéressant de déterminer les tronçons AE, ..., FB pour le cas particulier dont nous nous occupons.

Le calcul de la position des points C et D se fait très-facilement en ayant recours aux formules :

$$1^{re}\text{ travée.}\quad AC = \frac{208.25}{208.25 + 50.00} \times 40 = 32^{m}.26,$$

$$2^{e}\ id.\quad AC = \frac{-50}{-50 - 13.4} \times 50 = 39^{m}.43,$$

$$3^{e}\ id.\quad AC = \frac{13.4}{13.4 + 3.6} \times 50 = 39^{m}.41,$$

$$4^{e}\ id.\quad AC = \frac{-3.6}{-3.6 - 1} \times 50 = 39^{m}.13,$$

$$5^{e}\ id.\quad AC = \frac{1}{1 - 0} \times 40 = 40^{m}.$$

La poutre étant symétrique, le BD de la 1re travée est égal à l'AC de la 5me, le BD de la 2me à l'AC de la 4me, enfin le BD de la 3me à l'AC de la 3me elle-même; donc on a, au moyen d'une soustraction :

1re	travée.	AD = 0,
2e	*id.*	AD = 10m.87,
3e	*id.*	AD = 10m.59,
4e	*id.*	AD = 10m.57,
5e	*id.*	AD = 7m.74.

On détermine ensuite les points E et F, par la résolution de l'équation du second degré :

$$x^2 + \left[\frac{l_k^2}{2l_1 a_{n-1}}(\gamma_{k-2}\, a_{n-k} - \gamma_{k-1}\, a_{n-k-1}) - l_k\right]x - l_k^3\, \frac{\gamma_{k-2}(a_{n-k} + \alpha_{n-k-1})}{2l_1\, \alpha_{n-1}} = 0.$$

	VALEUR de $\gamma_{k-2}\alpha_{n-k} - \gamma_{k-1}\alpha_{n-k-1}$.	VALEUR de $(\alpha_{n-k} + \alpha_{n-k-1}) \times \gamma_{k-2}$.
1re travée.	+ 50	0
2e travée.	— 1.76	— 36.60
3e travée.	0	— 35.28

Il est inutile de pousser plus loin ces tableaux; car après

avoir trouvé les points E et F dans la 1re et la 2me travée, on obtiendra par la symétrie les E et F de la 5me et de la 4me.

On forme ainsi les équations :

$$1^{re}\text{ travée : } x^2+\left(\frac{\overline{40}^2}{2\times 8330}\times 50-40\right)x+0=x^2-35{,}20\,x=0.$$

$$2^{e}\text{ travée : } x^2+\left[\frac{\overline{50}^2}{2\times 8330}\times(-1.76)-50\right]x-$$

$$-\frac{\overline{50}^3}{2\times 8330}(-36{,}60)=x^2-50{,}26x+274{,}61=0.$$

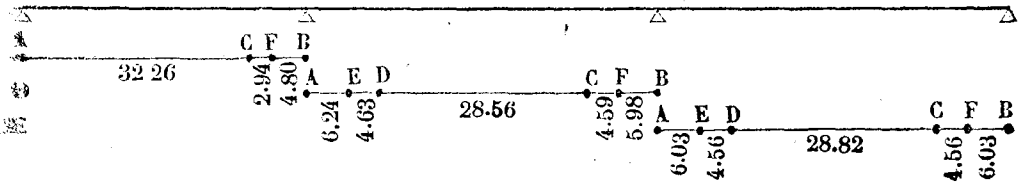
$$3^{e}\text{ travée : } x^2-50x-\frac{\overline{50}^3}{2\times 8330}(-35{,}28)$$

$$=x^2-50x+264{,}71=0.$$

Ces équations donnent :

1re	travée	AE = 0,	AF = 35m.20,
2e	*id.*	AE = 6m.24,	AF = 44m.02,
3e	*id.*	AE = 6m.03.	AF = 43m.97.

Et le partage des travées se fait de la manière suivante :



On ne pousse pas l'épure plus loin que la 3me travée, parce qu'on retrouverait la division des travées n° 2 et n° 1, renversée dans les travées n° 4 et n° 5.

§ 5. *Tableau résumé du nombre d'hypothèses à faire pour l'étude d'une poutre continue de* n *travées.*

Nous réunissons ici dans un même tableau les résultats obtenus dans ce chapitre et dans le précédent sur le nombre d'hypothèses à faire pour l'étude d'une poutre de n travées.

Nombre de travées.	POUTRES QUELCONQUES.			POUTRES SYMÉTRIQUES.		
	Nombre total d'hypothèses distinctes.	Nombre total d'hypothèses utiles.	Nombre d'hypothèses distinctes à calculer en introduisant l'hypothèse auxiliaire $p+p'$.	Nombre total d'hypothèses distinctes.	Nombre total d'hypothèses utiles.	Nombre d'hypothèses distinctes à calculer en introduisant l'hypothèse auxiliaire $p+p'$.
n.	2^n-1.	$2n$. (pour $n>2$)	$n+1$.	$2^{n-1}+2^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}-1$	$n+1$. (pour $n>2$)	$E\left(\frac{n+4}{2}\right)$.
2	3	»	»	2	»	»
3	7	6	4	5	4	3
4	15	8	5	9	5	4
5	31	10	6	19	6	4
6	63	12	7	35	7	5
7	127	14	8	71	8	5
8	255	16	9	135	9	6
9	511	18	10	271	10	6
10	1023	20	11	527	11	7

§ 6. *Observations sur les poutres continues.*

1. Les équations fondamentales sur lesquelles repose le calcul des poutres continues sont établies dans la supposition que la poutre a une section uniforme d'un bout à l'autre de sa longueur. Lorsqu'on a construit l'épure des moments fléchissants et des efforts tranchants, on se sert de cette donnée pour faire varier les dimensions de la section de la poutre, de manière à serrer de près les contours des polygones limites. De là résulte que la poutre construite n'est pas dans les conditions de la poutre idéale soumise aux calculs ; la flexion qu'elle prend ne suit pas les mêmes lois, et par suite les efforts se distribuent dans la poutre réelle d'une manière autre que celle qui a été prévue.

Néanmoins, on ne cherche pas à rectifier cette erreur, parce que les calculs qu'il faudrait faire quand la section est variable d'un point à l'autre de la poutre sont beaucoup trop compliqués. L'expérience prouve d'ailleurs qu'il n'y a pas lieu de se préoccuper des conséquences pratiques des inexactitudes dues à cette méthode de fausse position.

2. En général, on donne une même longueur aux portées centrales d'une poutre continue; les travées de rive reçoivent une longueur un peu moindre; le rapport de $\frac{4}{5}$, pour les portées des travées de rive comparées aux portées centrales, est très-convenable pour l'œil. Ce rapport est voisin du nombre $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0{,}7887..$, qui donne l'abscisse de l'un des points d'inflexion d'une poutre encastrée à ses deux extrémités. Étant donnée une suite de portées égales, toutes encastrées sur leurs appuis, et toutes également chargées, on en ferait en effet une poutre continue à extrémités libres en coupant la première et la dernière travée en leurs points d'inflexion extrêmes, où les moments sont nuls, et où la réaction de la culée sur la poutre exercera de haut en bas un effort égal à l'effort tranchant.

3. Si l'on compare deux poutres, l'une continue, l'autre coupée sur les appuis, franchissant les mêmes portées avec les mêmes surcharges, on reconnaît en général que la poutre continue, à égalité d'efforts dans le métal, a un poids moindre que la poutre à travées indépendantes; et que les pressions exercées sur les appuis *intermédiaires* sont moindres pour les poutres à travées indépendantes que pour la poutre continue.

4. Une poutre peut être continue par rapport aux surcharges et non continue par rapport à son poids propre. Cela a lieu pour un pont métallique de plusieurs ouvertures, dont les travées, posées séparément sur les culées et les piles, ont

été réunies ensuite par des panneaux rapportés qui ne subissent d'efforts que sous l'action des surcharges.

5. Les efforts développés dans certaines régions des travées des poutres continues s'exercent tantôt dans un sens, tantôt en sens contraire; et cette inversion d'efforts n'est pas favorable à la résistance du métal. Cela n'a pas lieu dans les poutres coupées sur les appuis.

6. Par ces divers motifs, il y a des constructeurs qui préfèrent les travées discontinues aux poutres continues sur plusieurs appuis. Ils partagent alors en parties égales l'ouverture totale à franchir. Ils ont un peu plus de fer dans les fermes, des efforts un peu moindres sur les piles, et ils sont sûrs qu'il n'y a pas de renversement dans le travail des différentes parties de la construction.

Cette solution est employée principalement dans les ponts qu'un intérêt militaire peut amener à couper un jour. Il importe en effet alors que les travées soient indépendantes pour que la rupture de l'une n'entraîne pas la chute des travées voisines (*).

7. On trouve des exemples de ponts métalliques de plusieurs travées coupés sur certains appuis sans l'être sur tous; les plus remarquables sont le pont de Dirschau, sur la Vistule (**), comprenant 6 travées de $132^{m},51$ coupées sur les appuis de numéro impair; et le pont Victoria (***), sur le Saint-Laurent, à Montréal, composé de 25 travées, dont la travée centrale, longue de $100^{m},58$, est indépendante, et les vingt-quatre autres, longues chacune de $70^{m},07$, sont coupées de deux en deux appuis et forment douze poutres continues de deux travées, réparties symétriquement de chaque côté de la travée centrale. Cette solution mixte paraît vicieuse en ce

---

(*) On en voit un exemple dans le pont de la Dvina, à Dunabourg.

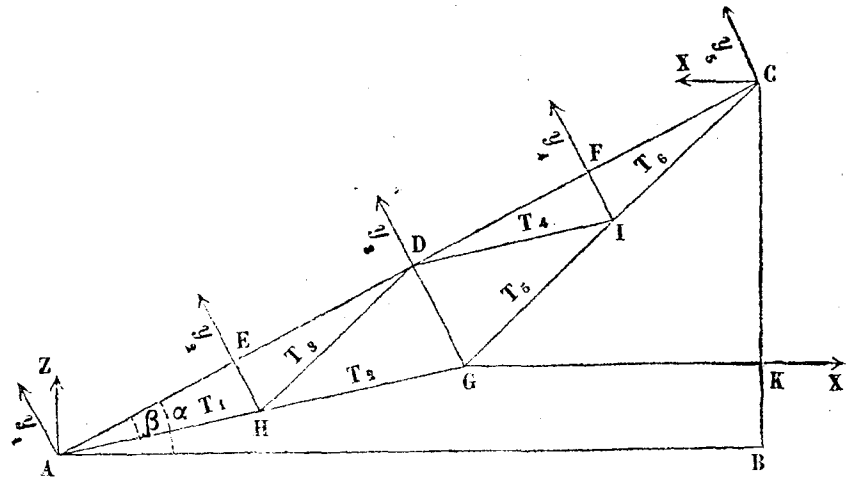
(**) Chemin de fer de l'Est prussien.

(***) Grand trunk Canada railway.

qu'elle réunit les inconvénients des travées continues et des travées discontinues sans avantage spécial; elle conduit à une grande inégalité dans les efforts sur les piles, elle n'économise pas beaucoup de métal dans la construction des travées, et elle donne lieu à des renversements d'efforts dans certaines régions des poutres quand la surcharge se déplace.

§ 7. *Calcul des efforts développés dans une toiture.*

La ferme dont nous allons nous occuper a son arbalétrier soutenu en trois points équidistants par des jambes de force normales, rattachées par des tirants à l'arbalétrier lui-même. Nous supposerons, pour appliquer le calcul, que les tensions des tirants soient réglées de manière que les points d'application des jambes de force sur l'arbalétrier soient en ligne droite avec les extrémités de la pièce.



Soit :

$AB = a$, la demi-portée de la ferme,
$BC = b$, la flèche du comble.

L'angle $CAB = \alpha$, formé par l'arbalétrier avec l'horizon, aura pour tangente $\frac{b}{a}$.

Soit AC $= l$ la longueur de l'arbalétrier, laquelle est égale à $\sqrt{a^2+b^2}$ ou à $\frac{a}{\cos\alpha}$.

L'arbalétrier est soutenu en trois points, savoir : le point D, milieu de sa longueur, et les points E et F, milieux de ses moitiés; les jambes de force normales EH, DG, FI sont maintenues par les tirants CG, AG, DH, DI ; enfin, le tirant GK relie le tirant AG au tirant symétrique de l'autre moitié de la ferme, et fait équilibre à la poussée mutuelle des deux arbalétriers au point C.

Nous appellerons p le poids par unité de longueur horizontale qui porte sur l'arbalétrier, y compris le poids propre de la charpente; et p' le poids par unité de longueur mesurée parallèlement à l'arbalétrier, de sorte que l'on aura entre ces deux poids la relation $pa = p'l$, ou $p' = p\cos\alpha$.

La réaction X des deux arbalétriers au point C peut être supposée horizontale à cause de la symétrie de figure et de pose qui existe entre les deux moitiés de la ferme; une tension égale à X s'exerce dans le tirant GK, pour l'équilibre des composantes horizontales des forces extérieures. L'appui sur lequel repose l'arbalétrier en A, exerce sur la ferme, de bas en haut, une poussée verticale Z égale au poids pa de la demi-ferme avec sa charge; et, appelant b' la quantité BK dont le tirant GK est relevé au-dessus de l'horizontale AB, on a pour déterminer X l'équation suivante, qui exprime l'égalité entre les deux couples (X, — X) et (Z, $-pa$),

$$X(b-b') = Z \times \frac{a}{2}.$$

Les forces extérieures à la demi-ferme sont ainsi entièrement déterminées, et c'est l'équilibre intérieur dont nous devons maintenant chercher les conditions.

Isolons d'abord l'arbalétrier; il est chargé sur sa longueur l d'un poids p', uniformément réparti par unité li-

néaire, et ce poids fait avec la direction de la pièce un angle égal à $90° - \alpha$. Il se décompose en deux forces, l'une $p' \cos \alpha$, normale, l'autre $p' \sin a$ dans le sens longitudinal de l'arbalétrier. Faisons provisoirement abstraction de cette dernière force pour ne considérer que la composante normale.

Nous décomposerons de même en deux forces, l'une normale, l'autre tangentielle, toutes les autres forces qui agissent sur l'arbalétrier, telles que les réactions Z et X et les tractions obliques exercées par les tirants; appelons y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, les cinq réactions normales qui s'exercent sur l'arbalétrier aux points A, E, D, F, C, et laissons de côté les réactions parallèles à cette pièce.

L'arbalétrier pourra être assimilé à une poutre droite posée sur cinq appuis de niveau, également espacés et uniformément chargés d'un poids $p' \cos \alpha$ par unité de longueur.

L'application du théorème des trois moments à ce cas particulier très-simple, fera connaître sur le champ les moments de rupture M_2, M_3, M_4 sur les trois appuis intermédiaires E, D, F, et par suite les réactions y_1, ... y_5 des cinq appuis A, E, D, F, C.

On trouvera d'abord :

$$M_2 = M_4 = -\frac{3}{2^6 \times 7} p' l^2 \cos \alpha = -\frac{3}{2^6 \times 7} p a^2$$

$$M_3 = -\frac{1}{2^5 \times 7} p' l^2 \cos \alpha \quad = -\frac{1}{2^5 \times 7} p a^2$$

Résultats indépendants de l'angle α pour un poids p donné.

et ensuite :

$$y_1 = y_5 = \frac{11}{2^4 \times 7} p' l \cos \alpha = \frac{11}{2^4 \times 7} p' a = \frac{11}{112} p a \cos \alpha.$$

$$y_2 = y_4 = \frac{2}{7} p' a = \frac{32}{112} p a \cos \alpha.$$

$$y_3 = \frac{13}{2^3 \times 7} p' a = \frac{26}{112} p a \cos \alpha.$$

On voit que les réactions normales aux points

A, E, D, F et C

sont proportionnelles aux nombres

11, 32, 26, 32 et 11,

et que leur somme est $p'l\cos\alpha = p'a = pa\cos\alpha$, composante normale du poids total porté par l'arbalétrier, ce qui devait se vérifier.

Les forces y_2 et y_4 donnent immédiatement la compression des jambes de force EH et FI. La force y_3 n'indique pas la compression de la jambe DG, à cause de l'action des tendeurs DI, DH.

Nous représenterons les tensions des tirants

AH, HG, HD, DI, GI, IC,

par les lettres

T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6.

Appelons encore β l'angle EAH du premier tirant avec l'arbalétrier; cet angle se retrouve en EDH, IDF, ICF et son complément en EHA, EHD, DGH, DGI, FID, FIC. Soit enfin P la compression encore inconnue de la jambe de force DG.

Nous avons pour déterminer ces sept inconnues, les équations contenues dans le tableau suivant :

ÉQUILIBRE des forces appliquées au point	COMPOSANTES NORMALES à l'arbalétrier.	COMPOSANTES PARALLÈLES à l'arbalétrier.
A.	(1) $y_1 = Z\cos\alpha - T_1\sin\beta$	»
H.	(2) $y_2 = (T_1 - T_2 + T_3)\sin\beta$	(3) $T_1 = T_2 + T_3$ (en divisant par $\cos\beta$)
D.	(4) $y_3 = P - (T_3 + T_4)\sin\beta$	»
G.	(5) $P = (T_2 + T_5)\sin\beta - X\sin\alpha$	(6) $T_2\cos\beta = T_5\cos\beta + X\cos\alpha$
I.	(7) $y_4 = (T_4 - T_5 + T_6)\sin\beta$	(8) $T_4 + T_5 = T_6$ (en divisant par $\cos\beta$)
C.	(9) $y_5 = X\sin\alpha - T_6\sin\beta$	»

Nous n'avons pas formé les équations des composantes parallèles à l'arbalétrier aux points A, D et C, parce qu'elles introduiraient comme nouvelle inconnue la compression de l'arbalétrier.

On obtient ainsi neuf équations entre sept inconnues. De l'équation (1) on tirera T_1, dont la valeur subtituée dans les deux équations (2) et (3) fera connaître la somme $T_2 + T_3$ et la différence $T_2 - T_3$ des tensions T_2 et T_3; on en déduira donc aisément les valeurs de ces tensions. De même l'équation (9) fait connaître T_6, et par suite les deux équations (7) et (8) donnent T_4 et T_5; on a ainsi déterminé les six tensions inconnues sans avoir fait usage des équations (4), (5) et (6). L'équation (5) donne la valeur de P. Les deux équations (4) et (6) doivent donc se réduire chacune à une identité.

Le calcul démontre en effet que l'équation (4) se réduit à la relation $y + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = pa \cos \alpha$, que nous avons déjà vérifiée; et que l'équation (5) se ramène à la suivante :

$$Z \cos \alpha \cos \beta = X \sin (\alpha + \beta),$$

laquelle équivaut à celle-ci :

$$b - b' = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{a}{2} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta),$$

identité évidente, puisqu'on a :

$$b = a \operatorname{tg} \alpha$$

et

$$b' = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha - \frac{l}{2} \operatorname{tg} \beta \cos \alpha = \frac{a}{2} (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta).$$

Le calcul des tensions conduit en définitive aux résultats suivants :

$$T_1 = \frac{Z\cos\alpha - y_1}{\sin\beta} \quad \text{ou bien} \quad T_1 = \frac{101}{112}\frac{pa\cos\alpha}{\sin\beta}$$

$$T_2 = T_1 \frac{1}{2}\frac{y_2}{\sin\beta} \qquad T_2 = \frac{85}{112}\frac{pa\cos\alpha}{\sin\beta}$$

$$T_3 = T_4 = \frac{1}{2}\frac{y_2}{\sin\beta} \qquad T_3 = T_4 = \frac{16}{112}\frac{pa\cos\alpha}{\sin\beta}$$

$$T_5 = T_6 - \frac{1}{2}\frac{y_2}{\sin\beta} \qquad T_5 = \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} - \frac{27}{112}\right)\frac{pa\cos\alpha}{\sin\beta}$$

$$T_6 = \frac{X\sin\alpha - y_1}{\sin\beta} \qquad T_6 = \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} - \frac{11}{112}\right)\frac{pa\cos\alpha}{\sin\beta}$$

$$P = Z\cos\alpha - 2y_1 - y_2 \qquad P = \frac{46}{112}pa\cos\alpha.$$

En général l'angle β diffère peu de l'angle α; si nous supposons que ces deux angles soient égaux, ce qui revient à poser $b' = 0$, on aura les formules simplifiées :

$$T_1 = \frac{101}{112}pa\operatorname{cotg}\alpha, \quad T_2 = \frac{85}{112}pa\operatorname{cotg}\alpha, \quad T_3 = T_4 = \frac{16}{112}pa\operatorname{cotg}\alpha,$$

$$T_5 = \frac{29}{112}pa\operatorname{cotg}\alpha, \quad T_6 = \frac{45}{112}pa\operatorname{cotg}\alpha.$$

Les réactions des jambes de force, y_2, y_4, et P sont indépendantes de l'angle β.

Les moments fléchissants M_2, M_3, M_4 de l'arbalétrier sur les appuis serviront à évaluer aux points E, D, F, les efforts de compression et d'extension qui résultent de la flexion produite par les forces normales à la poutre. On pourra, si on veut traiter la question dans tous ses détails, déterminer par les méthodes connues les moments fléchissants en un point quelconque de la longueur de l'arbalétrier. Cette recherche sera peu utile dans la pratique parce que les arbalétriers reçoivent en général une même section d'un bout à l'autre de leur longueur et que cette section doit être calculée d'après le moment M_2, maximum des moments de rupture. Outre ces efforts normaux, l'arbalétrier est encore

soumis aux actions longitudinales dues aux composantes des forces obliques Z, X, T_1, T_3, T_4, T_6 et du poids de la demi-ferme; ces actions se font équilibre par la compression générale développée dans l'arbalétrier, laquelle est variable d'un point à l'autre de sa longueur; au pied de l'arbalétrier la compression est mesurée par $Z \sin \alpha + T_1 \cos \beta$, au sommet elle est égale à $X \cos \alpha + T_6 \cos \beta$, et la différence de ces deux valeurs est égale à $pa \sin \alpha$, composante parallèle du poids total de l'arbalétrier.

La compression générale de l'arbalétrier varie ainsi entre deux limites déterminées; pour avoir en un point d'une section quelconque la pression totale subie par la matière, il faudra faire la somme algébrique des pressions correspondantes à la flexion d'une part, à la compression générale de l'autre, à laquelle on pourra attribuer le maximum de sa valeur.

Nous avons observé que le moment M_2 est indépendant de l'angle α; ce qui indique que la section que l'arbalétrier doit recevoir pour résister à la flexion ne varie pas avec l'inclinaison du comble et doit être calculée seulement d'après le poids *pa*. Il n'en est pas de même de la compression $Z \sin \alpha + T_1 \cos \beta$, de sorte que le minimum de section à donner à l'arbalétrier pour résister à cet effort dans le sens de la longueur varie avec l'inclinaison α. La longueur de l'arbalétrier étant égale à $\frac{a}{\cos \alpha}$, le produit $\frac{a}{\cos \alpha} (Z \sin \alpha + T_1 \cos \beta)$ peut donc être considéré comme proportionnel au poids nécessaire de l'arbalétrier, c'est-à-dire à la partie principale du poids propre de la demi-ferme. Cette remarque conduit à fixer par approximation l'angle α qui correspond à la charpente la plus légère. Si l'on suppose pour plus de simplicité $\beta = \alpha$, relation qui n'est pas loin de la vérité, on voit que la question est ramenée à dé-

terminer l'angle α qui rend la fonction

$$\frac{112\sin^2\alpha + 101\cos^2\alpha}{112\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{101 + 11\sin^2\alpha}{112\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{101}{112}\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha,$$

la plus petite possible.

Le minimum de cette fonction correspond à un angle de $43° 30'$ environ.

THÉORIE DES FERMES A POUTRES DROITES EN TREILLIS
ET DES FERMES AMÉRICAINES.

ERRATA.

Page 23. Ligne 11. Au lieu de : $\frac{d^4y}{dy^4}$, lisez : $\frac{d^4y}{dx^4}$.

Page 29. Lignes 2 et 3. Au lieu de : *auquel le métal est appelé à résister*, lisez : *que la poutre est appelée à supporter.*

Page 30. Ligne 3. Après *les longerons*, ajoutez : *sous la voie.*

Page 34. Ligne 1. Au lieu de : *longerons*, lisez : *tables horizontales.*

Page 52. Ligne 24. Au lieu de : *pieds*, lisez : *poids.*

Page 54. Ligne 24. Au lieu de : $m = \frac{n-1}{2}x - \frac{n+1}{2}x^2$

lisez : $M = \frac{n-1}{2}x - \frac{n+1}{2}x^2$.

Page 55. Ligne 6. Au lieu de : $\frac{\frac{11}{2}x - \frac{13}{2}x^2}{1-3x+3x^2-x^2}$, lisez : $\frac{\frac{11}{2}x - \frac{13}{2}x^2}{1-3x+3x^2-x^3}$.

Page 55. Ligne 3e de la note. Au lieu de : $\frac{M}{(1-x^3)}$, lisez : $\frac{M}{(1-x)^3}$.

Page 55. Ligne 11e de la note.

Au lieu de : A+B+C—B—2C, lisez : A+B+C, —B—2C.

Page 56. Ligne 6. Effacez au bout de la ligne : $\frac{35}{2}$ —.

Page 56. Ligne 7. Au lieu de : $pa\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $-\frac{36}{2}pa\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

lisez : $-\frac{35}{2}pa\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $-\frac{36}{2}pa\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Page 57. Ligne 13. Au lieu de u_{l-3}, lisez : u_{l-2}.

Page 61. Ligne 2. Au lieu de : π, lisez : Π.

Page 64. Ligne 4. Au lieu de : *ni l'un ni l'autre*, lisez : *ni l'une ni l'autre.*

Page 68. Ligne 10. Supprimer la virgule après *déterminée.*

Page 71. Lignes 4 et 5. Au lieu de : *à double ou à triple croisillons*, lisez *à doubles ou à triples croisillons.*

Page 72. Ligne 1. Au lieu de : *double*, lisez : *doubles.*

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES POUTRES DROITES

IIe PARTIE.

THÉORIE DES POUTRES MÉTALLIQUES EN TREILLIS ET DES POUTRES AMÉRICAINES.

THÉORIE DES FERMES

A

POUTRES DROITES EN TREILLIS

ET

DES FERMES AMÉRICAINES.

L'importance des ponts métalliques pour les chemins de fer de la Russie résulte de plusieurs circonstances locales dont il est facile d'apprécier la valeur. C'est en Russie qu'on trouve, à peu d'exceptions près, les plus grands cours d'eau de l'Europe. Chaque année, au moment de la fonte des neiges, les rivières se gonflent tout à coup, et, sortant de leurs lits, se répandent à grande distance dans les vallées. Pour franchir de tels obstacles, il faut des ponts d'un grand débouché. D'un autre côté, la rareté des matériaux fait souvent préférer les constructions métalliques aux constructions en maçonnerie, même pour des ponts d'une ouverture médiocre. A plus forte raison pour les grandes ouvertures, le fer doit-il être presque exclusivement adopté. De 1857 à 1862, la *Grande Société des chemins de fer russes* a construit sur ses lignes plus de cent trente ponts métalliques ; un extrait de la liste de tous ces ouvrages, comprenant seulement les principaux ponts d'un débouché total au moins égal à 60 mètres, donnera une idée du développement des constructions métalliques sur le réseau des chemins concédés.

Tableau des ponts métalliques du réseau de la Grande Société des chemins de fer russes, d'un débouché supérieur à 60 mètres.

NUMÉROS des verstes.	DÉSIGNATION DES PONTS.	DÉBOUCHÉ.	NOMBRE de travées	Observations.
A partir de Pétersbourg.	*Ligne de Saint-Pétersbourg à Varsovie.*	mèt.		
116	Pont de la Louga.	110.64	2	(*a*,*b*)
262	— de la Tcherokha.	89.46	3	(*b*)
306	— d'Ostroff, sur la Velikaia.	83.82	1	
499	— de Dunabourg, sur la Dvina. . .	258.92	3	
499	— de décharge de la Dvina.	63.90	3	
621	— de la Vilia.	63.90	1	
650	— de la Vileika.	72.74	3	
669	— de la Vacca.	79.87	3	
806	— de Grodno, sur le Niémen. . . .	210.87	3	(*c*)
876	— de la Suprasl.	70.29	3	
902	— du Narew.	159.75	3	
970	— du Boug.	279.11	5	
998	— du Liviec.	73.48	3	
	Embranchement vers la frontière de Prusse.			
754	Pont de Kovno, sur le Niémen.	274.77	4	(*c*)
A partir de Moscou.	*Ligne de Moscou à Nijni-Novgorod.*			
90	Pont de Pokroff, sur la Kliazma. . . .	141.94	2	
187	— de Bogolioubovo, sur la Nerll. .	108.93	4	(*d*)
238	— de Kovroff, sur la Kliazma. . . .	223.65	4	
340	— de Gorochovetz, sur la Kliazma.	332.28	5	

(*a*) Construit par la Couronne.
(*b*) Entreprises du général Ogareff.
(*c*) Entreprise Gouin et C^ie^.
(*d*) Entreprise Cail et C^ie^.

De tous ces grands ponts, un seul, celui du Niémen à Kovno, est à poutre pleine ; deux, ceux de Dunabourg et de Louga, sont à treillis double ; tous les autres sont à treillis simple, y compris une multitude d'autres ponts d'une moindre portée.

Le chemin de fer de Pétersbourg à Moscou renferme aussi des ouvrages d'art de grande ouverture : les ponts du Volkhoff, de la Msta, de la Verebia, de la Tvertsa, du Volga, de la Skhodnia, et plusieurs autres encore ont des débouchés d'autant plus grands que le tracé du chemin de fer reste

plus exclusivement sur les plateaux et traverse les vallées avec un relief énorme.

Tableau des ponts principaux du chemin de fer Nicolas.

NUMÉROS des verstes à partir de Pétersbourg.	NOM DU COURS D'EAU TRAVERSÉ.	DÉBOUCHÉ total.	NOMBRE de travées.
		mèt.	
118	Le Volkhoff.	255.60	5
177	La Msta.	546.34	9
185	La Vérébia.	488.83	9
432	La Tvertsa.	178.92	3
444	Le Volga.	178.92	3
490	La Schoscha.	110.76	2
578	La Skhodnia.	238.56	4

Ces ouvrages sont construits en charpente d'après le système américain connu sous le nom de *How*; quoiqu'ils aient été établis avec tout le soin possible, ils exigent des règlements fréquents, une surveillance et un entretien continuels. Ces inconvénients empêcheront que le système adopté sur le chemin de Moscou ne soit appliqué ailleurs sur une aussi grande échelle, et forceront tôt ou tard l'administration de ce chemin à remplacer ces fermes en bois par des fermes métalliques plus durables. Le calcul des fermes de How n'en est pas moins une question d'art intéressante, qui n'a pas encore été traitée en France avec toute la généralité désirable. La théorie du treillis métallique, quoiqu'elle y soit mieux connue, est encore à beaucoup d'égards un sujet inexploré. Telles sont les raisons qui nous font consacrer les pages suivantes à l'étude de ces deux problèmes.

CHAPITRE PREMIER.

FORMULES GÉNÉRALES DE L'ÉQUILIBRE INTÉRIEUR D'UNE POUTRE DROITE A TREILLIS, POSÉE SUR DEUX APPUIS DE NIVEAU.

Une poutre droite, à treillis, repose horizontalement sur deux appuis fixes. On connaît la hauteur, le poids et la portée de la poutre, et il s'agit de déterminer les conditions de l'équilibre intérieur de cette pièce.

Dans une poutre pleine, les pressions et les tensions du métal varient d'une manière continue d'un point à l'autre de la portée. Cette continuité n'existe plus dans les treillis; les efforts développés dans les tables horizontales y subissent des variations brusques d'un côté à l'autre des points où s'attachent les barres composant la jonction des deux tables. L'expérience démontre cependant que ces variations sont assez petites, dans les treillis à mailles quelque peu serrées, pour qu'on puisse regarder comme continus les efforts auxquels est soumise la matière dans des constructions de cette nature. Aussi appliquerons-nous à la recherche de ces efforts le calcul infinitésimal et non le calcul aux différences finies, dont l'emploi serait plus rigoureusement justifié dans la solution du problème proposé. De même on traite habituellement par le calcul différentiel la question de l'équilibre intérieur des ponts suspendus, où la discontinuité des efforts est peut-être encore plus frappante.

Quel que soit le détail de la poutre à treillis que nous avons à étudier, nous y trouverons toujours (Pl. II, *fig.* 1) une table supérieure A, une table inférieure B, et un treillis E intermédiaire entre ces deux tables.

Coupons la poutre par deux plans verticaux MN, M'N', conduits perpendiculairement à l'axe de la construction; nous regarderons ces plans comme infiniment rapprochés; l'un passe en deçà, l'autre au delà des points C et D où le treillis s'attache aux deux tables, et au milieu des intervalles com-

pris entre ces points et les points d'insertion des barres voisines. Après avoir isolé le système solide compris entre ces deux plans, il faut, pour rétablir l'équilibre, introduire dans chaque partie coupée une force équivalente aux actions moléculaires qui s'y exerçaient avant la coupure.

Admettons, pour fixer les idées, que la table supérieure A soit comprimée et la table inférieure B distendue. La suite du calcul rectifierait d'ailleurs cette supposition si elle était contraire à la vérité. Soit x l'abscisse du plan MN comptée le long de la poutre à partir d'une origine quelconque, de l'une des extrémités de la poutre par exemple; $x+dx$ sera l'abscisse du plan M'N'. Soit encore F la force de compression à appliquer à la table supérieure dans le plan MN, et F' la force d'extension à appliquer dans le même plan à la table inférieure. Les forces à appliquer aux deux tables dans le plan voisin M' N' seront dirigées en sens contraires de F et de F', et respectivement égales à $F+\frac{dF}{dx}dx$, $F'+\frac{dF'}{dx}dx$, en vertu de la continuité que nous avons admise.

Nous sommes conduit à faire ici une première hypothèse, celle de la répartition uniforme des pressions et des tensions, entre toutes les barres du treillis aux points où elles sont rencontrées par un même plan vertical, ce qui revient à substituer une pression et une tension moyennes aux pressions et tensions différentes de chaque barre prise en particulier. Soit n le nombre de barres *montantes* ou de barres *descendantes* rencontrées par une même verticale, le système montant et le système descendant comprenant un nombre égal de barres ; soit α l'angle constant qu'elles font avec la verticale, les unes dans un sens, les autres en sens contraire. D'après notre hypothèse, il suffira de considérer deux forces φ et φ', dirigées la première suivant chacune des barres du système montant, la seconde suivant chacune des barres du système descendant. Il est facile de prévoir et le calcul nous démontrerait au besoin que si l'une est une

force de compression, l'autre est une force d'extension. Ces forces φ et φ' se retrouveront dans les barres du treillis à la rencontre du plan M'N', dirigées en sens contraire et augmentées de leurs différentielles.

Nous désignerons par p le poids de la poutre par unité de longueur, y compris la surcharge, de sorte que pdx sera le poids total de l'élément limité par les plans MN, M'N'.

Enfin H représentera la distance des forces horizontales F et F'; si les actions moléculaires étaient uniformément réparties sur la section des tables, la quantité H serait la distance des centres de gravité de ces sections.

Nous allons écrire les équations d'équilibre des forces qui agissent sur l'élément considéré; ces équations sont au nombre de trois, puisque les forces peuvent être supposées contenues dans le plan longitudinal moyen de la ferme. Le problème consiste à trouver les valeurs des quatre forces F, F', φ, φ' en fonction de l'abscisse x, et l'on voit sur-le-champ qu'au point de vue analytique ce problème est indéterminé, puisque la statique ne fournit que trois équations entre quatre inconnues. L'équilibre intérieur de la poutre est donc possible d'une infinité de manières, et ce sont les diverses circonstances de la posé et de l'ajustage des pièces qui achèvent dans chaque cas particulier de déterminer le problème. Une nouvelle hypothèse est donc nécessaire pour compléter la solution, et nous choisirons celle qui la simplifie davantage.

Prenons les composantes horizontales des forces agissant sur l'élément de ferme, nous aurons l'équation :

$$n(\varphi-\varphi')\sin\alpha+\mathrm{F}-\mathrm{F}'-n\left(\varphi+\frac{d\varphi}{dx}dx-\varphi'-\frac{d\varphi'}{dx}dx\right)\sin\alpha-$$
$$-\mathrm{F}+\mathrm{F}'-\frac{d\mathrm{F}}{dx}dx+\frac{d\mathrm{F}'}{dx}dx=0.$$

Ce qui se réduit à

$$n\left(\frac{d\varphi}{dx}-\frac{d\varphi'}{dx}\right)\sin\alpha+\frac{d\mathrm{F}}{dx}-\frac{d\mathrm{F}'}{dx}=0.$$

Cette équation nous montre qu'indépendamment de toute hypothèse nouvelle, la fonction $n(\varphi-\varphi')\sin\alpha + F-F'$ est constante dans toute l'étendue de la poutre. Cette force horizontale se retrouve donc tout entière à l'extrémité de la poutre, et doit y être équilibrée par la composante horizontale de la réaction de la culée ; mais nous admettons que la poutre pose sur ses appuis sans y exercer de poussée latérale, et par suite la fonction $n(\varphi-\varphi')\sin\alpha + F-F'$, égale à zéro sur la culée, est nulle en tous points de la portée.

On satisfait très-simplement à cette condition en posant $F=F'$, ce qui entraîne en même temps $\varphi=\varphi'$; et c'est cette hypothèse que nous adopterons pour achever la détermination des inconnues. On voit qu'elle consiste à admettre que dans les poutres à treillis, comme dans les poutres pleines, la compression d'une des tables est égale à l'extension de la table opposée ; il en résulte l'égalité des pressions et des tensions dans les deux systèmes de barres du treillis. Nous n'avons plus alors que deux inconnues F et φ ; et les équations des composantes verticales et des moments nous en font connaître les valeurs.

1° Équation des composantes verticales (*) :

$$2n\varphi\cos\alpha = pdx + 2n\left(\varphi + \frac{d\varphi}{dx}\,dx\right)\cos\alpha,$$

laquelle se réduit à l'équation suivante :

$$2n\frac{d\varphi}{dx}\cos\alpha + p = 0. \quad (1)$$

2° Équation des moments, pris par rapport à un point quelconque, le point D par exemple.

La somme des moments des forces appliquées aux deux tables par rapport à ce point est égal à $-\frac{dF}{dx}\,dx \times H$. Nous

(*) On néglige, suivant l'usage adopté par les constructeurs, les efforts tranchants exercés dans la section des tables.

donnons le signe — à ce moment parce que la force qui y entre seule tend à faire tourner de droite à gauche son point d'application, autour du centre adopté pour le calcul des moments.

Le poids pdx, dont la direction passe par le point D, a un moment nul.

Les $2n$ forces φ, appliquées en différents points du plan M N, ont une résultante verticale, montante, et égale à $2n\varphi\cos\alpha$. Les $2n$ forces $(\varphi + \frac{d\varphi}{dx}dx)$, appliquées en différents points du plan M'N', ont une résultante verticale, mais descendante, et égale à $2n(\varphi + \frac{d\varphi}{dx}dx)\cos\alpha$. La somme des moments de ces deux forces par rapport au point D est positive et égale à l'expression :

$$2n\varphi\cos\alpha\,dx + 2n\frac{d\varphi}{dx}\cos\alpha \times \frac{\overline{dx}^2}{2},$$

expression qui se réduit à son premier terme en effaçant le terme infiniment petit du second ordre.

L'équation des moments est donc en définitive :

$$H\frac{dF}{dx} = 2n\varphi\cos\alpha. \quad (2)$$

L'équation (1) donne la loi de variation des forces φ, et montre que φ est une fonction linéaire de l'abscisse x ; l'équation (2) exprime la loi de variation des forces F, et montre que F est une fonction entière du second degré de cette même variable x. Ces deux équations peuvent d'ailleurs s'interpréter autrement : le produit H F est en effet le *moment fléchissant* ou *moment de rupture* de la poutre dans le plan M N, et $2n\varphi\cos\alpha$ est l'*effort tranchant* dans ce même plan. Désignant par M le moment de rupture, et par A l'effort tranchant, les équations (1) et (2) se transforment dans les deux suivantes :

$$dA + pdx = 0, \qquad dM = A\,dx,$$

lesquelles sont les équations générales applicables à toutes les poutres droites, tandis que les équations (1) et (2) ne conviennent qu'aux poutres à treillis.

L'intégration des équations (1) et (2) est facile, et introduit deux constantes arbitraires qu'il faut déterminer dans chaque cas particulier.

L'intégrale de l'équation (1) est :

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{px}{2n\cos\alpha};$$

la constante arbitraire φ_0 est la valeur de la force φ pour $x = 0$, Si donc on prend pour origine des abscisses l'aplomb de la culée, φ_0 est la force développée dans une barre aboutissant à la culée. La somme $2n\varphi_0\cos\alpha$ des composantes verticales des forces φ_0 est donc égale à la réaction de la culée, ou à $\frac{1}{2}pl$, l étant la portée de la poutre; donc

$$\varphi_0 = \frac{pl}{4n\cos\alpha},$$

et

$$\varphi = \frac{p}{2n\cos\alpha}\left(\frac{l}{2} - x\right).$$

Cette équation nous apprend que φ est nul au milieu de la portée et change de signe d'un côté à l'autre de ce point : les barres d'une même inclinaison sont donc comprimées dans une des moitiés de la poutre et étendues dans l'autre moitié.

En substituant dans l'équation (2) cette valeur de φ, on parvient à l'intégrale suivante :

$$\mathrm{HF} = \tfrac{1}{2}px\,(l - x),$$

la constante arbitraire introduite par l'intégration est nulle ici, parce que la poutre est simplement posée sur la culée à partir de laquelle on compte les abscisses. On reconnaît sur-le-champ que F est nul pour $x = 0$ et pour $x = l$.

c'est-à-dire sur les culées, et qu'il est maximum pour $x = l - x$, c'est-à-dire au milieu de la portée.

Nous avons ainsi trouvé les formules générales qui donnent φ et F, et reconnu que F varie proportionnellement aux ordonnées $\frac{l}{2} - x$ d'une ligne droite, tandis que F varie proportionnellement aux ordonnées $x(l-x)$ d'une parabole à axe vertical : résultats utiles en ce qu'ils permettent de construire une épure qui indique en chaque point la valeur des forces auxquelles la matière de la poutre doit être en mesure de résister.

Avant de pousser plus loin le développement des équations (1) et (2), nous observerons que le calcul aux différences finies ne nous aurait pas conduit à d'autres résultats que ceux que nous venons de formuler. Pour ce calcul, dx devrait être remplacé par une quantité constante Δx, finie et égale à la distance de deux barres consécutives. L'équation (1) deviendrait dans cette nouvelle hypothèse :

$$2n\,\Delta\varphi\cos\alpha + p\Delta x = 0,$$

d'où l'on tirerait comme de l'équation différentielle :

$$\varphi = \frac{p}{2n\cos\alpha}\left(\frac{l}{2} - x\right),$$

en observant toutefois que dans cette dernière équation, x ne doit recevoir que les valeurs discontinues 0, Δx, $2\Delta x$, $3\Delta x$, ... dont la différence soit constante et égale à Δx. L'équation (2) où l'on conserverait le terme du second ordre en Δx, deviendrait :

$$\mathrm{H}\Delta\mathrm{F} = 2n\varphi\cos\alpha\,\Delta x + n\Delta\varphi\cos\alpha\,\Delta x,$$

ou bien en remplaçant φ et $\Delta\varphi$ par leurs valeurs en x et Δx,

$$\mathrm{H}\Delta\mathrm{F} = p\left(\frac{l}{2} - x\right)\Delta x - \tfrac{1}{2}p\overline{\Delta x}^2,$$

équation qui conduit à poser encore, sous la même restric-

tion que tout à l'heure : $HF = \frac{1}{2} px(l - x)$, sans nouvelle constante, puisque F est nul quand $x = 0$.

Les valeurs de F varient donc d'une manière discontinue, et sont représentées en réalité par les ordonnées d'un contour polygonal inscrit dans la parabole à laquelle conduit le calcul différentiel. De même les valeurs exactes de φ sont proportionnelles aux ordonnées d'un contour polygonal dont les sommets sont tous situés sur la droite dont nous avons indiqué plus haut l'équation.

Évidemment il n'y a dans la pratique aucun inconvénient à substituer des lignes continues à ces contours polygonaux composés ordinairement d'un grand nombre d'éléments tous très-petits.

CHAPITRE II.

DISCUSSION ET APPLICATION DES FORMULES.

Le problème qu'il s'agit de résoudre consiste à déterminer le minimum des sections nécessaires pour qu'en aucun point de la poutre le métal ne subisse, par unité de surface, un effort supérieur à une limite donnée.

L'analyse nous permet de fixer d'une manière générale la valeur de l'angle α qui correspond au moindre poids du treillis.

En un point quelconque de la portée, la section d'une barre doit être proportionnelle à l'effort φ que cette barre supporte ; le poids du métal contenu dans le treillis entre les plans MN et M'N' est donc proportionnel au produit $\varphi \times \frac{dx}{\sin\alpha}$, dans lequel φ représente, à un facteur constant près, la section de la barre, et $\frac{dx}{\sin\alpha}$ est la longueur de cette barre comprise entre les deux plans. Si l'on substitue dans cette expression la valeur de φ en fonction de x, il vient :

$$\frac{p}{2n} \frac{1}{\cos\alpha \sin\alpha} \left(\frac{l}{2} - x\right) dx = \frac{p}{n \sin 2\alpha} \left(\frac{l}{2} - x\right) dx,$$

et le seul élément que l'on soit maître d'altérer dans cette fonction est le diviseur $\sin 2\alpha$. Le minimum du poids du treillis correspond donc au maximum de ce diviseur, c'est-à-dire au cas où l'angle α est égal à 45°, et où les deux systèmes de barres se coupent orthogonalement.

Les sections des barres du treillis, déterminées en fonction de la force φ, décroîtront à partir de la culée jusqu'au milieu du pont. On peut pour cela faire varier soit la largeur de la barre, soit son épaisseur, soit enfin à la fois ses deux dimensions. A s'en rapporter aveuglément au calcul que nous avons présenté, la section des barres au milieu de la portée pourrait être réduite à zéro : résultat paradoxal qui s'explique en observant que notre calcul a supposé une répartition uniforme de la surcharge, ce qui n'est jamais réalisé dans la pratique, sauf en certaines circonstances exceptionnelles. Lorsque la surcharge n'occupe qu'une partie de la longueur du pont, les réactions des culées sont généralement inégales, et le point où l'effort tranchant est nul n'est plus au milieu de la portée. Nous allons voir comment on peut déduire de cette considération une courbe des valeurs maximum de φ; la droite que nous avons obtenue tout à l'heure pour représenter φ dans l'hypothèse d'une surcharge répandue uniformément sur toute la portée est une tangente à cette courbe.

La lettre p désignant toujours le poids par unité de longueur de la poutre, surcharge comprise, appelons p' le poids propre de la poutre par unité de longueur. Le poids p sera supposé appliqué sur la poutre, à partir de la culée, sur une longueur l' ; le poids p' sera appliqué seul sur le reste de la poutre jusqu'à l'autre culée, sur une longueur $l - l' = l''$.

Au lieu de rechercher la courbe des valeurs maximum de φ, nous construirons la courbe des valeurs maximum de l'effort tranchant A. Nous savons en effet que la force A est égale au produit de φ par un facteur constant $2n\cos\alpha$.

A_0 étant la réaction de la culée du côté où se trouve

placée la surcharge, et A_1 la réaction de l'autre culée, le théorème des moments donne sur-le-champ :

$$A_0 = \frac{pl'l'' + \frac{pl'^2}{2} + \frac{p'l''^2}{2}}{l},$$

$$A_1 = \frac{p'l'l'' + \frac{pl'^2}{2} + \frac{p'l''^2}{2}}{l}.$$

A_0 et $-A_1$ sont les valeurs de l'effort tranchant sur les deux culées ; prenons pour origine la culée du côté de la surcharge, nous aurons, pour la loi de variation de l'effort tranchant, l'équation :

$$dA + pdx = 0, \text{ entre les limites } x = 0 \text{ et } x = l',$$

et l'équation :

$$dA + p'dx = 0, \text{ entre les limites } x = l' \text{ et } x = l.$$

De sorte que, dans l'hypothèse particulière admise sur la répartition de la surcharge, l'effort tranchant sera donné par l'équation :

$$A = A_0 - px \text{ entre } x = 0 \text{ et } x = l',$$

et par l'équation :

$$A = -A_1 - p'(x - l), \text{ entre } x = l' \text{ et } x = l.$$

Ces deux fonctions représentent deux droites d'inclinaisons différentes, qui se coupent au point dont l'abscisse est l', et dont l'ordonnée est :

$$y = \frac{pl'l''}{l} + \frac{pl'^2}{2l} + \frac{p'l''^2}{2l} - pl'.$$

Les efforts tranchants sont donc représentés ici par deux droites formant un angle, et le sommet de cet angle décrit, lorsqu'on fait varier l', une courbe dont l'équation s'obtiendra en remplaçant, dans l'équation qui précède, l' par x et l'' par $l - x$. On obtient ainsi l'équation d'une parabole dont

les ordonnées représentent en chaque point le maximum de la valeur que puisse acquérir en ce point l'effort tranchant pour une distribution incomplète de la surcharge à partir d'une culée.

L'équation de cette courbe est, toute réduction faite :

$$2ly = (p' - p)\,x^2 - 2p'lx + p'l^2.$$

Cette parabole rencontre les verticales passant par les appuis ; on a : $y = \frac{1}{2}p'l$ pour $x = 0$, ce qui correspond à une surcharge nulle, et $y = -\frac{1}{2}pl$ pour $x = l$, ce qui correspond à une surcharge uniforme sur toute la portée. Au premier point la courbe est tangente à la droite dont le coefficient angulaire est $-p'$; au second, elle est tangente à la droite dont le coefficient angulaire est $-p$. Au milieu de la portée, pour $x = \frac{l}{2}$, on a : $y = -(p - p')\frac{l}{8}$.

Telle est la plus grande valeur de l'effort tranchant au milieu de la travée ; elle ne dépend que de la surcharge $p - p'$.

Pour prévoir tous les cas possibles, il faut répéter cette courbe symétriquement par rapport à l'axe de la travée, la surcharge pouvant être incomplétement répartie à partir de la seconde culée ; il faut en outre replier, du côté des ordonnées positives, toutes les portions des deux courbes qui correspondent aux ordonnées négatives, les efforts tranchants devant toujours, au point de vue de la résistance du métal, être considérés en valeur absolue (*fig.* 2).

Le calcul précédent conduit à fixer une limite supérieure du rapport de l'effort tranchant au centre de la travée à l'effort tranchant maximum sur la culée. En effet, le maximum de l'effort tranchant au milieu de la poutre correspond au cas où l'on suppose p' très-petit par rapport à p, et a pour limite, en faisant p' nul, $\frac{pl}{8}$, ou le quart de l'effort tranchant maximum sur la culée.

Le tracé de la parabole des efforts tranchants maximum permet de calculer les sections des barres du treillis de manière qu'en aucun point l'effort subi par le métal ne dépasse une limite fixée d'avance ; et il est d'usage, pour simplifier la fabrication, de partager les barres du treillis en groupes contenant chacun un nombre à peu près égal de barres d'un même modèle.

La courbe des valeurs du moment M de rupture est définie de même par les équations :

$$d\Lambda + pdx = 0.$$

$$d\mathrm{M} = \mathrm{A}dx.$$

D'où l'on tire, en éliminant A : $\dfrac{d^2\mathrm{M}}{dx^2} = -p.$

L'intégrale de cette équation est $\mathrm{M} = \mathrm{A}_0 x - \frac{1}{2}px^2$, sans ajouter de constante, parce que la poutre n'étant pas encastrée, on doit avoir à la fois $\mathrm{M} = 0$ et $x = 0$.

Un calcul facile démontrerait qu'il est inutile pour la recherche des maxima du moment M de supposer la charge incomplétement répartie sur la poutre ; car l'hypothèse qui donne en tout point le maximum de M correspond à une surcharge complète. Il n'en est pas de même pour l'effort tranchant, comme nous venons de le faire voir.

Nous n'aurons donc qu'à déduire différentes valeurs de F de l'équation

$$\mathrm{HF} = \tfrac{1}{2}px\,(l - x).$$

Abstraction faite des variations peu sensibles du facteur H, F varie proportionnellement aux ordonnées de la parabole $y = x\,(l - x)$. La valeur de F est d'autant moindre que le facteur H est plus grand. Mais dans la pratique ce facteur n'est jamais arbitraire, et quelquefois il est loin d'atteindre la hauteur entière de la ferme. C'est ce qui arrive quand on est forcé de dédoubler les paquets de tôles à assembler, le calcul leur assignant une épaisseur totale qui rendrait les

rivures inpraticables. Enfin, la hauteur de la poutre, d'où se déduit le bras de levier H, est limitée par d'autres circonstances encore ; elle varie dans les grands ponts du huitième au douzième de la portée ; elle ne doit pas excéder une certaine proportion, les $\frac{3}{2}$ ou les $\frac{7}{5}$, de la largeur du pont, pour que la poutre ait sur les culées une assiette suffisante ; elle est commandée en certaines circonstances par l'obligation de maintenir à des niveaux définis le dessous des fermes, le plan des rails ou de la voie, et en même temps le dessus des fermes pour assurer un contreventement au pont sans gêner le passage des véhicules et des chargements.

Au centre de la portée, on a $HF = \frac{1}{8} pl^2$, et par suite $= \frac{\frac{1}{8} pl^2}{H}$. On en déduit la section minimum de la table. Du centre aux deux culées, cette section est graduellement réduite par la suppression d'un certain nombre de feuilles. Les nécessités de la fabrication entraînent toujours dans les environs des culées un excès notable de matière.

Dans la portion de la poutre qui repose sur la culée, et qui ordinairement est formée d'une partie pleine arrêtant le treillis, il est nécessaire, pour prévenir l'écrasement de cette partie sous la réaction de la culée, de lui donner une section horizontale proportionnelle à cette réaction.

Le projet de ferme se trouve, après ces calculs, esquissé dans ses principales parties. Reste l'étude des détails, et principalement des rivures et des assemblages. Avant de passer à cette nouvelle question, nous comparerons les fermes à treillis aux fermes à parois pleines de mêmes dimensions et de même résistance.

A ne considérer que superficiellement les poutres à treillis, on est tenté de croire qu'un tel système doit conduire à une réduction du poids de la poutre. Il y a avantage, en

effet, à éloigner de l'axe neutre les fibres résistantes qui composent une poutre, et à les concentrer dans deux bandes séparées l'une de l'autre par le plus grand intervalle possible : cette considération a conduit à évider la région voisine de l'axe neutre, et à transformer en treillis la paroi pleine. Ce raisonnement est démenti et par l'expérience et par la théorie. L'expérience démontre que les économies de métal faites dans la construction d'un pont à treillis sont toujours, au delà d'une certaine limite, préjudiciables à la durée de l'ouvrage. La théorie met en évidence le rôle que joue dans la résistance de la ferme la paroi, pleine ou évidée, qui rattache l'une à l'autre les deux tables.

Cette paroi est l'organe par lequel s'opère la transmission des tensions et des pressions d'une région à l'autre de la pièce, et elle a besoin d'être nourrie en vue de ce travail indispensable à l'équilibre moléculaire de la construction.

Nous avons vu que l'*effort tranchant* A en un point quelconque de la ferme défini par l'abscisse x est la dérivée par rapport à x du *moment de rupture* M dans la section correspondante à cette même abscisse. Dans une poutre à treillis, l'effort A s'exerce obliquement sur $2n$ barres, auxquelles on peut faire supporter une pression ou une tension-limite de R kilogrammes par millimètre quarré de section ; le minimum de la section droite d'une barre est donc donné par la fraction $\frac{A}{2n\cos\alpha \times R}$, et le volume du treillis, pour un élément de longueur dx est par suite égal à :

$$\frac{A}{2n\cos\alpha \times R} \times \frac{dx}{\sin\alpha} \times 2n = \frac{2A\,dx}{R\sin 2\alpha},$$

expression qui, dans le cas le plus favorable, celui où $\alpha = 45°$, se réduit à $\frac{2A\,dx}{R}$.

Dans une poutre pleine de même dimension que la poutre

à treillis, et chargée de la même manière, l'effort tranchant est équilibré par la résistance de la paroi pleine au cisaillement ; désignons par R′ la limite de résistance du métal par millimètre quarré. La section nécessaire pour la paroi pleine sera donc représentée par $\frac{A}{R'}$, et par suite le volume du métal employé par la paroi sur une longueur dx sera $\frac{A\,dx}{R'}$. Or on peut admettre que $R = R'$; on adopte, en effet, le plus souvent une limite de 5 kilogrammes pour les tensions et pressions dans le treillis, et cette limite est aussi celle de la résistance pratique du fer au cisaillement. Dans cette hypothèse, le volume de la paroi évidée est donc double du volume de la paroi pleine.

Outre ce premier excès de matière dont la nécessité est mathématiquement démontrée, le treillis conduit encore à un autre excès, dû à la discontinuité des attaches. Chaque barre doit être rivée séparément aux tables, et chacun de ces assemblages doit être en état de résister individuellement à toute action qu'il aurait à subir. La continuité de la paroi pleine, outre qu'elle répartit uniformément la rivure avec les tables, crée entre les diverses parties de la poutre une solidarité qui les soulage l'une par l'autre. Dans les treillis, au contraire, la rivure des barres demande l'emploi de grandes feuilles de tôle, ou de cornières de dimensions exceptionnelles (*) ; d'où résulte un excès de poids et un excès de dépense.

(*) Sur les ponts de la ligne de Moscou à Nijni-Novgorod, construits par la maison Cail et Cie, l'attache des treillis aux tables s'opère au moyen de deux cornières ayant des branches inégales, de 100 et de 200 millimètres, de 16 millimètres d'épaisseur, lesquelles *moisent* les treillis entre leurs grandes branches. On peut mettre jusqu'à onze rivets au point commun d'insertion de deux barres entre les cornières. Les rivets résistent alors à un double cisaillement.

Malgré cette infériorité économique du treillis, on ne renoncera pas à ce mode de construction pour s'en tenir exclusivement aux ponts à poutres pleines. L'élégance d'un treillis bien dessiné et l'aspect repoussant d'une paroi pleine ramèneront toujours un grand nombre de constructeurs à préférer le système le plus satisfaisant à l'œil au système dont le bon marché est le seul mérite. L'architecture des ponts à poutres pleines est d'ailleurs encore à découvrir, tandis que celle des ponts à treillis est maintenant pour ainsi dire consacrée par quelques exemples. C'est à l'Allemagne que revient le mérite d'avoir créé ce genre d'architecture, le seul auquel la tôle ait pu jusqu'à présent se plier.

CHAPITRE III.

FLEXION DE LA POUTRE A TREILLIS.

F étant toujours la pression ou tension totale qui s'exerce dans les deux bandes horizontales de la poutre, et ω la section de ces bandes, dans le plan défini par l'abscisse x, E étant le coefficient d'élasticité du métal, l'élément de longueur dx, pris, avant la flexion, sur la bande comprimée, devient après la compression $dx\left(1-\frac{F}{E\omega}\right)$ et l'élément étendu acquiert la longueur $dx\left(1+\frac{F}{E\omega}\right)$. Si donc on désigne par ρ le rayon de courbure de l'axe moyen de la poutre, lequel est à une distance commune $\frac{H}{2}$ des deux bandes, on aura la proportion :

$$\rho+\frac{H}{2}:\rho-\frac{H}{2}::dx\left(1+\frac{F}{E\omega}\right):dx\left(1-\frac{F}{E\omega}\right),$$

d'où l'on déduit :

$$\rho=\frac{EH}{2}\times\frac{\omega}{F}.$$

Le rapport $\frac{F}{\omega}$ est, dans la section considérée, la charge moyenne de la matière par unité de surface; l'épure de la distribution des tôles donne ω et fait connaître par suite autant de valeurs qu'on voudra de ce rapport.

Après avoir partagé la poutre en éléments suffisamment petits, on calculera pour chacun une valeur moyenne du rayon de courbure ρ qui lui appartiendra après la flexion. L'axe neutre sera ensuite tracé au moyen d'une série d'arcs de cercles se raccordant comme dans les anses de panier.

Si une poutre est construite de manière que, sous l'action des plus grandes surcharges qu'elle puisse subir, le métal ne supporte en aucun point des bandes une pression ou une tension supérieure à une limite K déterminée, il est facile de fixer une limite du rapport de la flèche à l'ouverture, pourvu que l'on connaisse le rapport de la hauteur H de la poutre à la portée.

Posons en effet $H = \theta l$, θ étant le rapport donné.

Puisque $\frac{F}{\omega}$ est en tous points inférieur à la limite K, on aura en tous points :

$$\rho > \frac{EH}{2} \times \frac{1}{K},$$

et, par suite, on attribue une courbure trop prononcée à l'axe neutre en adoptant pour rayon de courbure constant la quantité :

$$\rho' = \frac{EH}{2K}.$$

Par conséquent, la flèche véritable f de la poutre est inférieure à la flèche f' de l'arc de rayon ρ', laquelle est donnée approximativement par la formule :

$$f' = \frac{l^2}{8\rho'} = \frac{Kl^2}{4EH},$$

donc enfin :

$$\frac{f}{l} < \frac{K}{4E\theta}.$$

L'application de cette formule conduit à dresser le tableau suivant, dans lequel on a supposé E = 20 000 000 000 kilog. par mètre quarré.

RAPPORT θ de la hauteur à la portée.	CHARGE MAXIMUM PAR MILLIMÈTRE QUARRÉ DE SECTION DES BANDES.				
	4 kilogr.	5 kilogr.	6 kilogr.	7 kilogr.	7 kilogr. 1/2.
	Limite du rapport de la flèche à l'ouverture.				
$\frac{1}{8} = 0.125$	0.00040	0.00050	0.00070	0.00070	0.00075
$\frac{1}{9} = 0.111$	0.00045	0.00056	0.00067	0.00079	0.00085
$\frac{1}{10} = 0.100$	0.00050	0.00062	0.00075	0.00088	0.00095
$\frac{1}{11} = 0.091$	0.00055	0.00069	0.00082	0.00097	0.00105
$\frac{1}{12} = 0.083$	0.00060	0.00075	0.00090	0.00107	0.00115
$\frac{1}{15} = 0.067$	0.00075	0.00094	0.00112	0.00135	0.00146

Nos formules permettent de traiter la question des oscillations de la poutre ; nous ne nous occuperons que des oscillations verticales.

φ, F, x, p, H conservant leur signification, appelons y le déplacement vertical d'un point de l'axe neutre par rapport à sa position originaire, et t le temps : y sera considéré comme positif si le point considéré s'abaisse, et comme négatif dans le cas contraire.

Si l'on isole encore l'élément de poutre compris entre deux plans infiniment voisins x et $x + dx$, il faudra ajouter dans les équations d'équilibre au poids pdx de l'élément,

la force de réaction qui se réduit à $-\frac{pdx}{g}\frac{d^2y}{dt^2}$, puisque nous nous bornons à l'étude des oscillations qui s'opèrent suivant la verticale.

Les équations fondamentales deviennent donc dans ce cas :

$$2n\frac{d\varphi}{dx}\cos\alpha + p - \frac{p}{g}\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

$$H\frac{dF}{dx} = 2n\varphi\cos\alpha.$$

Si la surcharge est également répartie sur toute la longueur du pont, p est une constante ; si elle est inégalement ou incomplétement répartie, mais en même temps fixe, p est une fonction de x seul ; si enfin la surcharge se déplace, p est une fonction à la fois de x et de t.

La seconde équation n'est pas changée, parce que la force d'inertie a un moment nul.

φ est une fonction de F, et F peut s'exprimer en fonction de y. Pour y parvenir, désignons par ω la section des bandes dans le plan défini par l'abscisse x. Le rayon ρ de courbure de l'axe neutre est égal, comme nous l'avons remarqué, à :

$$\frac{EH\omega}{2F},$$

donc on peut poser :

$$\rho = -\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{EH\omega}{2F},$$

et négligeant $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ vis-à-vis de l'unité : $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2F}{EH\omega}$.

ω est une fonction de x.

Le problème est posé analytiquement, mais si on lui laisse toute sa généralité, il est d'une complication qui ne

permet pas d'en donner une solution simple et réellement pratique. Pour obtenir un résultat, nous admettrons que ω et p sont constants, c'est-à-dire que les bandes ont partout la même section et que la surcharge est également répartie.

Sous ces réserves, on a :

$$\frac{2}{EH\omega}\frac{dF}{dx} = -\frac{d^3y}{dx^3},$$

et par suite :

$$2n\varphi\cos\alpha = -\frac{E\omega H^2}{2}\frac{d^3y}{dx^3},$$

et enfin :

$$2n\frac{d\varphi}{dx}\cos\alpha = -\frac{E\omega H^2}{2}\frac{d^4y}{dy^4}.$$

D'où résulte l'équation entre la variable y et les deux variables indépendantes x et t :

$$-\frac{E\omega H^2}{2}\frac{d^4y}{dx^4} + p - \frac{p}{g}\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

On remarquera que $\frac{\omega H^2}{2}$ est le moment d'inertie de la section des deux bandes, supposées infiniment minces, par rapport à l'horizontale menée dans le plan de cette section par son centre de gravité ou par l'axe neutre.

L'intégrale de cette équation contient des termes de diverses sortes :

1° Une fonction entière du 4ᵉ degré de x, dont la 4ᵉ dérivée se réduit à une constante.

2° Une fonction entière du second degré de t, dont la 2ᵉ dérivée est également constante ; la somme de ces deux constantes, respectivement multipliées par $\frac{E\omega H^2}{2}$ et $\frac{p}{g}$, devra être égale à $+p$.

3° Une infinité de termes de la forme $C \sin(ax + bt)$, dans lesquels a et b aient entre eux une telle relation que la 4e dérivée de chaque terme par rapport à x, multipliée par $-\frac{E\omega H^2}{2}$, détruise le produit de la 2e dérivée par rapport à t multipliée par $-\frac{p}{g}$.

Cette condition donne :

$$-\frac{E\omega H^2}{2} a^4 + \frac{p}{g} b^2 = 0.$$

Dans le problème particulier qui nous occupe, il est facile de voir que la fonction entière de t doit disparaître de l'équation qui donne y en fonction de t et de x. En effet, des deux variables t et x, l'une x ne peut recevoir d'autres valeurs que les valeurs comprises entre o et l, tandis que t grandit indéfiniment; or les oscillations sont évidemment limitées, et l'on a toujours $y = 0$ pour $x = 0$ et $x = l$; la valeur de y ne peut donc contenir une fonction entière de t qui, à partir d'une certaine valeur de t, prendrait des valeurs de plus en plus grandes.

Il résulte de là qu'il faut chercher la solution dans l'équation :

$$y = A_0 x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4 + C \sin(ax + bt) + C' \sin(a'x + b't) + \ldots\ldots,$$

a et b, a' et b', etc., étant liés ensemble par la relation posée ci-dessus.

La 4e dérivée de la fonction entière est $24A_0$. Il faut donc que $-\frac{E\omega H^2}{2} \times 24A_0 + p = 0$; d'où l'on tire $A_0 = \frac{p}{12E\omega H^2}$.

La valeur de y se compose donc de deux parties : l'une indépendante du temps, et l'autre qui dépend à la fois de t et de x. La première représente une parabole du 4e degré qui est la position moyenne de l'axe neutre autour de la-

quelle s'opèrent les oscillations définies par les termes contenant t.

Il faut que, dans tous les cas, on ait $y = 0$ pour $x = 0$ et pour $x = l$, quelle que soit la valeur attribuée à t. Cette condition conduit à poser $A_4 = 0$, et de plus,

$$\frac{p}{12 E\omega H^2} l^3 + A_1 l^2 + A_2 l + A_3 = 0.$$

Il faut encore que, pour $x = 0$ et $x = l$, on ait $\frac{dy}{dt} = 0$, quel que soit t, et que les termes contenant le temps s'annulent.

On satisfait à cette double condition en groupant deux à deux les termes affectés des sinus, de manière que, dans chaque groupe, $C = C'$, $a = a'$ et $b' = -b$.

En effet, ces conditions n'ont rien d'incompatible avec la relation qui, dans chaque terme, doit unir a et b ; on aura alors, en se bornant à considérer un groupe quelconque de deux termes conjugués, et abstraction faite de la fonction entière de x :

$$y = C \sin (ax + bt) + C \sin (ax - bt) = 2C \sin ax \cos bt,$$

donc

$$\frac{dy}{dt} = -2C \sin ax \sin bt \times b.$$

y et $\frac{dy}{dx}$ s'annulent donc pour $x = 0$ quel que soit t ; et pour $x = l$, pourvu que $al = n\pi$, n étant un entier quelconque. Donc

$$a = \frac{n\pi}{l}, \quad \text{et} \quad b = a^2 \times \sqrt{\frac{E\omega H^2 g}{2p}} = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{E\omega H^2 g}{2p}}.$$

Le nombre n peut recevoir toutes les valeurs entières possibles en se bornant aux valeurs positives ; si l'on fait $n = 2$, les deux termes $C \sin (ax + bt) + C \sin (ax - bt)$

se réduiront à zéro, indépendamment du temps t, en trois points fixes : $x = 0$, $x = \frac{1}{2} l$ et $x = l$; si $n = 3$, ils se réduiront à zéro en quatre points, pour $x = 0$, $x = \frac{1}{3} l$, $x = \frac{2}{3} l$ et $x = l$, et ainsi de suite. Les valeurs à attribuer au nombre n dans les différents termes que l'on conserve, et le nombre plus ou moins grand de ces termes, dépendent de la forme initiale donnée à la poutre vibrante et des vitesses initiales de ses différents points. Il est inutile de rappeler ici les méthodes analytiques qui permettent de résoudre dans toute sa généralité le problème de la détermination de ces arbitraires. La plus simple vibration correspond à $n = 1$, et alors les extrémités seules de la poutre restent fixes dans l'oscillation. En admettant cette hypothèse restreinte, l'équation du mouvement de la poutre serait :

$$y = \frac{p}{12 \mathrm{E} \omega \mathrm{H}^2} x^4 + \mathrm{A}_1 x^3 + \mathrm{A}_2 x^2 + \mathrm{A}_3 x +$$

$$+ 2\mathrm{C} \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{\mathrm{E} \omega \mathrm{H}^2 g}{2p}}\, t,$$

dans laquelle A_1, A_2, A_3 sont liées entre elles par une relation linéaire. La constante C détermine l'amplitude des oscillations ; elle reste toujours très-petite. La durée d'une oscillation complète se calcule en prenant la différence de deux valeurs de t consécutives qui donnent à $\frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{\mathrm{E} \omega \mathrm{H}^2 g}{2p}}\, t$ deux valeurs distantes d'une circonférence. D'où résulte que cette durée $t = \frac{2l^2}{\pi} \sqrt{\frac{2p}{\mathrm{E} \omega \mathrm{H}^2 g}}$; le nombre N de vibrations par seconde sera par conséquent :

$$\mathrm{N} = \frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{\mathrm{E} \omega \mathrm{H}^2 g}{2p}}.$$

Nous n'avons pas déterminé les valeurs de la constante C ni des coefficients arbitraires A_1, A_2, A_3, dont l'un est exprimable au moyen des deux autres. Mais on sait par l'expérience que dans une poutre suffisamment roide, la constante C ne peut prendre, dans les cas de la pratique, qu'une valeur très-petite, de sorte que la portion oscillatoire de la flèche est le plus ordinairement négligeable par rapport à la partie constante définie par la fonction du quatrième degré de x. Le nombre N est aussi généralement très-petit, ainsi que l'indique le son très-grave rendu par les poutres qui entrent en vibration. Il résulte de là que la vitesse vibratoire $\frac{dy}{dt}$ d'une tranche quelconque, n'acquiert jamais de bien grandes valeurs, et que la force d'inertie par unité de longueur $-\frac{p}{g}\frac{d^2y}{dt^2}$ est une quantité petite par rapport au poids p. La parabole du quatrième degré représentant l'état moyen de l'axe neutre diffère en général très-peu de la forme d'équilibre, et l'on peut déterminer par cette considération des valeurs approximatives des coefficients A_1, A_2, A_3.

Lorsqu'un train passe avec une certaine vitesse sur le tablier du pont, on peut admettre que la déformation s'opère de manière à réaliser à chaque instant la situation d'équilibre qui convient à la position de la surcharge à cet instant ; une fois le train passé, la poutre entre dans une série de vibrations périodiques autour de sa forme d'équilibre, jusqu'à ce que les frottements et la résistance de l'air l'aient ramenée au repos. L'amplitude initiale de la vibration dépend des efforts exercés par le train pendant son passage, et parmi ces efforts, les chocs jouent certainement le principal rôle. Comme on n'a pas jusqu'ici de données bien positives sur l'intensité et la fréquence de ce genre d'efforts, il est impossible de déterminer par le calcul, sans observation directe, la valeur de la constante qui indique l'amplitude des vibrations.

Cette recherche d'ailleurs serait peut-être sans résultat pour la question qui intéresse le plus le constructeur, à savoir, la durée de la construction. Il ne s'agit pas tant en effet de chercher l'effet mécanique du passage des charges en mouvement et de calculer les excès d'effort qui peuvent se développer, par suite de ce passage, que d'apprécier l'altération moléculaire produite par les trépidations du métal. Les calculs de flèches partent toujours d'un coefficient d'élasticité qui reste constant, tandis que ce coefficient d'élasticité varie, vraisemblablement, à la suite de l'ébranlement des molécules. Ainsi il n'est pas rare de voir une pièce, un arbre tournant, par exemple, présentant à l'origine toutes les conditions de résistance, se briser à la suite d'un travail prolongé, sans avoir jamais subi d'efforts exceptionnels. Peut-être un certain temps de repos est-il nécessaire pour qu'une poutre métallique, ébranlée par le passage d'une charge, reprenne son état moléculaire normal. La perturbation produite par le passage d'une charge mobile doit surtout être dangereuse pour les régions des poutres continues à plusieurs travées où il y a renversement des efforts suivant la position de la surcharge. On pourrait assimiler ces régions au piston d'une machine à vapeur qui est tantôt tiré, tantôt comprimé, et auquel on donne toujours un excès de section pour empêcher l'altération du métal sous ces efforts alternatifs.

CHAPITRE IV.

DU POIDS PAR MÈTRE COURANT ET DES LIMITES DES EFFORTS DANS LE MÉTAL.

Étant donnée la portée l d'un pont métallique à treillis que l'on se propose de construire, on détermine arbitrairement ou d'après les conditions particulières auxquelles l'ouvrage doit être soumis, la hauteur H qu'il convient d'attribuer à la poutre. Pour calculer ensuite les dimensions

qu'il faut donner à ses diverses parties, il est nécessaire de connaître le poids p par mètre courant auquel le métal est appelé à résister, et ce poids se compose de deux portions : l'une p' est le poids propre de la ferme, l'autre p'' est une surcharge accidentelle, qui est supposée connue d'après la destination du pont et d'après sa portée.

Jusqu'à présent, on a pris arbitrairement le poids p' sauf à vérifier ensuite, par le métré du projet, que le poids effectif était au plus égal au poids supposé. C'est une méthode de fausse position qui est de mise dans la plupart des questions de travaux publics.

Il est cependant possible d'affranchir le calcul de cette hypothèse, qui, lors même qu'elle ne conduirait pas à recommencer sur nouveaux frais les opérations dans le cas où le poids présumé serait trop faible, conduit généralement, dans le cas contraire, à un poids trop fort, puisque le projet est dressé de manière que sous le poids $p' + p''$ par mètre courant, le métal subisse un effort maximum donné. Les sections sont donc trop grandes si p' a été pris trop grand.

Il est par suite utile de chercher, d'après les calculs précédents, à déterminer p' sans lui attribuer primitivement de valeur arbitraire.

Prenons pour unités le mètre pour les longueurs et le kilogramme pour les forces. Nous supposerons connue la limite R de la charge par mètre carré pour le fer dans les bandes, la limite R′ de la charge dans le treillis, et la limite R″ de la pression par mètre carré dans la section horizontale des parties reposant sur les appuis.

Appelons ϖ le poids du mètre cube du métal dont se compose la poutre. Le volume de la poutre sera par conséquent en mètres cubes égal à $\frac{p'l}{\varpi}$.

La poutre se décompose comme il suit :

1° Les bandes ou tables ;

2° Le treillis ;

3° Les appuis sur les culées ;

4° Les accessoires, tels que les contreventements, les pièces de ponts, les longerons, s'il y en a ;

5° Les rivures et les couvre-joints.

Les trois premières peuvent se calculer avec une grande approximation.

1° Pour les tables, la section au milieu de la portée est donnée par l'expression $\frac{\frac{1}{8}pl^2}{H'R}$ où H' est une quantité un peu moindre que H. Sur les appuis cette section se réduit graduellement et peut même devenir très-petite ; si elle se réduisait à zéro, la section moyenne serait exactement les deux tiers du maximum ; la moyenne étant comprise entre les $\frac{2}{3}$ et le tout, on peut avec vraisemblance supposer qu'elle en est les $\frac{3}{4}$; ce qui donne $\frac{3}{32}\frac{pl^2}{H'R}$ pour la section moyenne d'une table applicable à toute la longueur du pont, en tout, pour les deux bandes, un volume égal à :

$$\frac{3}{16}\frac{pl^3}{H'R}.$$

2° Nous supposons le treillis tracé à 45° sur la verticale ; n étant le nombre des barres de l'un des systèmes, la force qui agit individuellement sur une barre aboutissant à la culée est :

$$\frac{\frac{1}{2}pl}{n\sqrt{2}}.$$

La section d'une barre à l'aplomb de la culée est donc égale à :

$$\frac{\frac{1}{2}pl}{n\sqrt{2}R'}.$$

Au milieu de la portée, cette section peut être réduite au quart de la valeur sur la culée, ou à :

$$\frac{\frac{1}{8}pl}{n\sqrt{2}\mathrm{R}'}.$$

La demi-somme des deux, $\frac{\frac{5}{16}pl}{n\sqrt{2}\mathrm{R}'}$, est applicable en moyenne à toute barre, de sorte que le volume du treillis est représenté par l'expression

$$\frac{\frac{5}{16}pl \times l\sqrt{2} \times 2n}{n\sqrt{2}\mathrm{R}'} = \frac{5}{8}\frac{pl^2}{\mathrm{R}'}.$$

3° La section horizontale nécessaire sur les culées est $\frac{\frac{1}{2}pl}{\mathrm{R}''}$, et comme elle s'applique à la hauteur H de la poutre, et à deux appuis, elle donne un volume total $\frac{pl\mathrm{H}}{\mathrm{R}''}$.

Nous avons donc exprimé les trois premiers termes du volume de la poutre, savoir :

$$p\left(\frac{3}{16}\frac{l^3}{\mathrm{H}'\mathrm{R}} + \frac{5}{8}\frac{l^2}{\mathrm{R}'} + \frac{\mathrm{H}l}{\mathrm{R}'}\right).$$

et l'ensemble de ces trois termes forme assurément la plus grande partie du volume de la poutre. Pour tenir compte des deux parties qui manquent encore, il est convenable de multiplier la somme des trois premières par un coefficient $1 + \mathrm{K}$, plus grand que l'unité, et de déterminer le nombre K suivant la disposition et la nature de la poutre. La comparaison de plusieurs ponts métalliques montre que le nombre K est ordinairement compris entre les limites $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$, de sorte que l'on peut adopter d'une manière générale $\mathrm{K} = 0.30$ comme une moyenne applicable à la plupart des ponts de chemins de fer.

On aura donc en définitive l'équation :

$$\frac{p'l}{\varpi} = p\left(\frac{3}{16}\frac{l^3}{\mathrm{H'R}} + \frac{5}{8}\frac{l^2}{\mathrm{R'}} + \frac{\mathrm{H}l}{\mathrm{R''}}\right)(1+\mathrm{K}).$$

Remplaçant p par $p'+p''$, et supprimant le facteur commun l, il vient :

$$p' = \frac{p''\left(\frac{3}{16}\frac{l^2}{\mathrm{H'R}} + \frac{5}{8}\frac{l}{\mathrm{R'}} + \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{R''}}\right)(1+\mathrm{K})}{\frac{1}{\varpi} - \left(\frac{3}{16}\frac{l^2}{\mathrm{H'R}} + \frac{5}{8}\frac{l}{\mathrm{R'}} + \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{R''}}\right)(1+\mathrm{K})},$$

expression où tout est déterminé ; p' s'en déduit, et avec p' le poids total $p'l$ de la ferme, accessoires compris.

Si l'on voulait calculer le poids propre p' d'une poutre pleine, il suffirait de remplacer par $\frac{5}{16}$ le coefficient $\frac{5}{8}$ du terme correspondant au volume du treillis.

Voici quelques renseignements sur les déterminations numériques des nombres R, R', R'' et p''.

En ce qui concerne d'abord la surcharge p'', on la suppose habituellement en France de 4 000 kilogrammes au plus par mètre courant de simple voie lorsque la portée excède 30 mètres ; au-dessous de 30 mètres, la surcharge augmente à mesure que la portée diminue, de manière à devenir, pour les petits ponts de 3 mètres, égale à 8 000 kilogrammes.

On attribue généralement au fer une résistance de 6 kilogrammes par millimètre quarré, ce qui revient à faire R = 6 000 000 kilogrammes.

En Russie il est d'usage d'admettre, quelle que soit la portée, une surcharge de 1 tonne anglaise et $\frac{1}{3}$ par pied courant de simple voie, ou 4 442 kilogrammes par mètre. Mais on a limité la résistance par millimètre carré à 4 kilogrammes dans les petits ponts de 3 à 10 mètres et dans les pièces de pont, à $3^k.8$ dans la région résistant à l'écrase-

ment sur les culées; on la prend égale à 6 kilogrammes dans les bandes des ponts moyens, de 10 à 30 mètres, et on l'élève enfin à $7\frac{1}{2}$ kilogrammes pour les grands ponts qui, dans l'exploitation, ne sont jamais soumis à une surcharge pleine.

On a en résumé :

EN FRANCE.	EN RUSSIE.
$p' =$ 8000^k pour des portées au-dessous de . . . . . 4^m 7000 *id.* de 4 à . . . . . 10 6000 *id.* de 10 à . . . . . 15 5000 *id.* de 15 à . . . . . 30 4000 *id.* de 30^m et au-dessus.	$p'' =$ 4 440^k pour toute portée.

par mètre courant de simple voie.

EN FRANCE.	EN RUSSIE.
R = 6 000 000^k.	R = 7 500 000^k de 30^m et au-dessus. 6 000 000 de 10 à 30^m. 4 000 000 au-dessous de 10^m.
R′ = 6 000 000	R′ = 5 000 000^k
R″ = 6 000 000	R″ = 3 800 000^k

Le nombre ϖ est égal à 7 800 kilogrammes.

Le coefficient K comprend plusieurs parties : l'une, correspondant aux rivures, est à peu près la même pour tous les ponts où les assemblages sont traités de la même manière ; l'autre, correspondant aux entretoisements des deux fermes, varie avec la disposition de l'ouvrage, et aussi avec la portée. On a vu plus haut qu'on peut fixer approximativement à 0.30 la valeur moyenne de K.

Pour la discussion de la formule, supposons donc que p'' est égal à 4 000 kilogrammes, que K est égal à 0.30, ce qui correspond à 23 pour 100 sur le poids total du pont, en rivures et en accessoires ; le poids ϖ du mètre cube de fer est pris égal à 7 800 kilogrammes; enfin soit $R = R' = R'' =$ 6 000 000, et $H' = H$. Dans la réalité, H′ est toujours un peu moindre que H ; prendre H pour H′ revient à admettre pour

limite de la pression et de la tension dans les longerons une charge un peu supérieure à 6 kilogrammes par millimètre carré.

Posons pour abréger :

$$V = \frac{3}{16}\frac{l^2}{H} + \frac{5}{8}l + H;$$

et nous aurons la formule simplifiée :

$$p' = \frac{p'' \times V}{\frac{R}{(1+K)\varpi} - V},$$

ou, en introduisant les valeurs numériques de p'', R, K et ϖ,

$$p' = \frac{4000\,V}{591{,}716 - V}.$$

V varie avec la portée l, et avec le rapport $\frac{H}{l}$ qui est le *surbaissement* de la poutre. Si on laisse $\frac{H}{l}$ constant, V s'évanouit pour $l = 0$; alors $p' = 0$. Les diverses courbes dont les ordonnées représentent, pour une même valeur du surbaissement, le poids p' en fonction de la portée l passent donc toutes par l'origine. On voit de plus qu'elles ont une asymptote verticale pour la valeur de l qui rend V égal à 591,716. Soit m le surbaissement $\frac{H}{l}$; on aura :

$$V = \left(\frac{3}{16m} + \frac{5}{8} + m\right)l,$$

et par suite la valeur de l qui rend p' infini est égale à :

$$l' = \frac{591{,}716}{\frac{3}{16m} + \frac{5}{8} + m}.$$

On trouve

$$\text{Pour} \quad m = \frac{1}{8}, \qquad l' = 262^{m}.98,$$

$$m = \frac{1}{10}, \qquad l' = 203^{m}.54,$$

$$m = \frac{1}{12}, \qquad l' = 175^{m}.01.$$

Ce sont les limites extrêmes des portées des ponts à treillis, pour un surbaissement donné.

La formule indique encore, pour une portée déterminée, le surbaissement qui rend p' minimum. Le minimum de p' correspond au minimum de V, lequel correspond, si l reste constant, au minimum de la somme $\frac{3}{16\,m} + m$, ou à :

$$m = \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,182,$$

surbaissement compris entre $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{6}$. Il est indépendant de la portée. Cette haute valeur du surbaissement n'est pas admissible en général dans la pratique.

Pour $m = 0.182$, la valeur infinie de p' correspond à $l' = 322^{m}.50$, limite théorique absolue de la portée des poutres droites à treillis, dans les conditions où nous les avons supposées.

Nous avons dressé (*fig.* 3) une épure qui donne les poids par mètre courant de simple voie pour trois surbaissements usuels, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{12}$, les portées variant de 0 à 100 mètres. Les courbes ne sont proprement applicables qu'aux portées supérieures à 30 mètres, parce qu'au-dessous, le poids p'' doit être augmenté : ce qui revient du reste à multiplier les ordonnées des courbes par un facteur proportionnel à la véritable valeur de p''.

Le tableau suivant indique les poids par mètre courant

des poutres à treillis de 30, 50, 70 et 100 mètres pour les divers surbaissements adoptés.

SURBAISSEMENT $m = \frac{H}{l}$.	PORTÉE :			
	30 mètres.	50 mètres.	70 mètres.	100 mètres.
$\frac{1}{8}$	$p' = 480$ kilog.	$p' = 939$ kilog.	$p' = 1\,451$ kilog.	$p' = 2\,450$ kilog.
$\frac{1}{10}$	$p' = 607$ kilog.	$p' = 1\,126$ kilog.	$p' = 1\,779$ kilog.	$p' = 3\,135$ kilog.
$\frac{1}{12}$	$p' = 706$ kilog.	$p' = 1\,333$ kilog.	$p' = 2\,169$ kilog.	$p' = 4\,000$ kilog.

Une remarque doit se placer à la fin de ce chapitre.

Dans un pont pour chemin de fer, dès que la portée dépasse 30 mètres, la surcharge p'' est constante, tandis que le poids p' s'accroît à mesure que l augmente. Il arrive donc, dans les très-grandes portées, que p' surpasse p'' : les efforts limites R, R', R'', étant atteints dans le métal pour la charge $p' + p''$, les efforts maximum du métal lorsqu'il n'y a aucune surcharge seront respectivement égaux à $\frac{p'}{p' + p''} \times R$, $\frac{p'}{p' + p''} \times R'$, $\frac{p'}{p' + p''} \times R''$, et ces efforts s'exercent d'une manière permanente, car ils résultent uniquement du poids propre du pont. Il est donc nécessaire, pour que la durée de la construction soit assurée, que ces efforts réduits soient inférieurs à la limite de la résistance *constante* du métal ; on peut admettre que cette limite est, pour le fer, égale à 4 kilogrammes. Il faut donc s'assurer, après avoir fait tous les calculs, que la fraction $\frac{p'}{p' + p''}$ des limites R, R' et R'' est inférieure à 4 kilogrammes. Jusqu'à 100 mètres de portée, p' ne dépasse guère p'', et $\frac{p'}{p' + p''}$ est au plus égal à $\frac{1}{2}$: cette

condition est donc en général satisfaite, mais au delà de 100 mètres, il n'en est plus toujours de même, d'autant plus que pour des portées aussi grandes, le rapport $\frac{H}{l}$ doit être généralement pris assez petit, ce qui augmente la valeur de p'.

Les limites indiquées plus haut comme ayant été adoptées en Russie, par ordre du département des chemins de fer, paraîtront sans doute bien étroites aux ingénieurs étrangers à ce pays. On justifie cet excès de précaution en faisant remarquer que les variations de température sont en Russie plus grandes, plus fréquentes et plus subites que dans le reste de l'Europe, et que les constructions en rase campagne ont à passer, suivant les saisons, d'un froid de 30 à 35° Réaumur à une température de 30 à 40 degrés au-dessus de zéro, ce qui nuit nécessairement à la résistance du métal. Il est juste de tenir compte de circonstances climatériques aussi défavorables. Mais peut-être l'a-t-on fait avec un peu d'exagération.

CHAPITRE V.

CALCUL DE L'ÉTABLISSEMENT DES RIVURES.

Le rivet qui réunit deux feuilles de tôle peut être considéré soit comme une broche que ces tôles, tirées en sens divers, tendent à cisailler, soit comme un lien qui, serrant les tôles ensemble, provoque un frottement qui ne leur permet pas de glisser l'une sur l'autre. Bien que, dans cette dernière hypothèse, la tension des fibres du rivet soit supérieure à la limite usuelle de la résistance du fer, la rivure n'est convenable que si un serrage énergique des tôles est effectivement produit.

Deux feuilles de tôle, réunies ensemble par un rivet bien posé, ne commencent à glisser l'une sur l'autre que lorsque l'effort exercé sur elles excède le produit de 15 kilogrammes

par le nombre de millimètres carrés contenus dans la section du rivet. En général on établit les calculs de la rivure en adoptant pour limite de l'effort auquel elle doit résister une charge de 5 kilogrammes par millimètre carré ou le tiers de la charge qui produit le glissement. Cette limite de 5 kilogrammes convient également à l'hypothèse du cisaillement simple, de sorte que l'on peut admettre comme règle générale, toute théorie à part, qu'un rivet convenablement posé possède une résistance de 5 kilogrammes par millimètre carré de section.

Sans entrer dans le détail de l'application de cette règle à divers cas particuliers, nous examinerons seulement la question suivante qui se présente d'elle-même, lorsqu'on a à calculer les rivures d'une ferme métallique à treillis.

Calcul de la rivure des cornières qui réunissent le treillis avec les longerons. — Deux méthodes peuvent être suivies pour déterminer le nombre de rivets à poser sur une longueur donnée pour rattacher au longeron les cornières embrassant le treillis.

L'une de ces méthodes consiste à remarquer qu'aux points d'insertion de deux barres qui se croisent, les cornières sont sollicitées par deux forces, l'une montante, l'autre descendante, toutes deux inclinées à 45° sur la verticale, et dont la résultante, sensiblement horizontale, tend à faire glisser la cornière sur le longeron. Les rivets doivent contrebalancer cette tendance. Soit φ a force qui agit dans une barre, en un point donné de la portée : $\varphi \times \sqrt{2}$ sera la valeur de la résultante qui tend à produire le glissement ; le nombre de rivets à placer sur les cornières dans l'intervalle de deux barres consécutives doit donc être calculé de manière que la somme des aires de ces rivets en millimètres carrés, multipliée par 5 kilogrammes, reproduise la force $\varphi\sqrt{2}$.

On attribuera à φ pour ce calcul la valeur maximum que

cette force puisse avoir, c'est-à-dire $\varphi_0 = \frac{pl}{4n \cos \alpha}$, ou, puisque le treillis est supposé à 45°, $\frac{pl\sqrt{2}}{4n}$. La somme des aires des rivets traversant la cornière à la jonction avec le longeron, pour un intervalle compris entre deux barres parallèles consécutives, est donc égale à $\frac{pl}{10n}$ millimètres carrés.

L'autre méthode s'applique aux ponts à treillis et aux ponts à poutre pleine. Elle résulte d'une interprétation de l'équation fondamentale :

$$dM = A dx.$$

Cette équation indique que l'effort tranchant A en un point quelconque de la poutre, est égal à la variation $\frac{dM}{dx}$ du moment fléchissant en ce point rapportée à l'unité de longueur.

Or si l'on désigne par h la distance verticale comprise entre les cornières qui réunissent l'âme du double T aux deux semelles, et par f la force qui tend à faire glisser la cornière le long de la semelle, rapportée à l'unité de longueur, on aura $\frac{dM}{dx} = hf$; car le moment hf du couple $(f, -f)$ est ce qui s'ajoute par unité de longueur au moment M au point considéré. Donc $A = hf$, et par suite $f = \frac{A}{h}$. Il suffit donc, pour calculer le nombre de rivets à placer par mètre courant de cornières, de diviser l'effort tranchant par la distance verticale entre les cornières hautes et basses de la poutre, puis de diviser par 5 le résultat, et de chercher combien de rivets d'un diamètre donné produisent une section équivalente à ce quotient. La somme des aires des rivets par unité de longueur est $\frac{A}{5h}$ millimètres carrés.

Ces deux méthodes donnent le même résultat ; en effet, la première formule, $\frac{pl}{10n}$, s'applique à l'intervalle de deux barres consécutives ou à la longueur $\frac{h}{n}$, et par suite, rapportée à l'unité de longueur, elle se réduit à

$$\frac{\left(\frac{pl}{10n}\right)}{\left(\frac{h}{n}\right)} = \frac{pl}{10h},$$

expression identique à $\frac{A}{5h}$, lorsqu'on attribue à A sa valeur maximum, $\frac{pl}{2}$.

CHAPITRE VI.

DISCUSSION D'UNE OBJECTION CONTRE LES POUTRES A TREILLIS.

Les barres qui constituent un treillis simple ont en général un assez faible équarrissage ; les unes sont étendues, les autres comprimées ; aussi certains ingénieurs considèrent-ils ces dernières barres comme placées dans des conditions très-défavorables de résistance et proposent-ils de les remplacer par des cornières, par des fers à T, par des rails Barlow présentant des dimensions latérales plus grandes dans tous les sens, ou bien de proscrire d'une manière absolue les treillis simples, *Lattice*, pour y substituer les treillis doubles, *Braced*, où les barres comprimées sont elles-mêmes des pièces à treillis, offrant de la résistance aux flexions latérales.

Sans contester l'efficacité de ces moyens, qui ajoutent assurément à la roideur de la poutre, il est aisé de reconnaître que l'objection faite aux ponts à treillis simple, n'a pas toute la valeur qu'on peut être tenté de lui attribuer.

Rappelons ici que E désignant le coefficient d'élasticité de la matière qui compose une pièce comprimée par ses abouts, I le moindre moment d'inertie de la section transversale de la pièce par rapport à toute droite menée dans son plan par son centre de gravité, L étant enfin la longueur libre de la pièce, le calcul indique pour valeur de la force φ qui produit une flexion l'expression :

$$\varphi = K^2 \pi^2 \frac{EI}{L^2};$$

dans laquelle π est le rapport de la circonférence au diamètre et K un entier quelconque, de sorte que la moindre valeur de φ correspond à la moindre valeur de K, ou à K égal à l'unité ; la pièce ne fléchira donc pas sous l'action d'une force

$$\varphi < \pi^2 \frac{EI}{L^2}.$$

Cela posé, soit b la largeur et a l'épaisseur d'une barre de treillis dont L soit la longueur libre ; on aura $I = \frac{1}{12} a^3 b$; donc :

$$\frac{\varphi}{ab} < \frac{1}{12} \pi^2 \frac{Ea^2}{L^2},$$

$\frac{\varphi}{ab}$ est la pression moyenne par unité de section dans la barre. Si l'on adopte pour limite de cette pression 5 kilogrammes par millimètre quarré, le maximum de $\frac{\varphi}{ab}$ sera 5 000 000, et remplaçant π et E par leurs valeurs 3.14 et 2×10^{10}, on voit qu'il suffit, pour que la flexion ne tende pas à se produire, que l'on ait :

$$\frac{a}{L} > \sqrt{\frac{5\,000\,000 \times 12}{(3.14)^2 \times 2 \times 10^{10}}},$$

ou, en effectuant les opérations : $\frac{a}{L} > 0.017$.

Cette inégalité donne une limite inférieure de la moindre dimension de la barre comprimée en fonction de la longueur L. Reste à savoir ce que c'est que la longueur L. Si les deux systèmes de barres n'étaient pas rivés l'un à l'autre à chaque intersection, L serait la longueur de la portion de la barre qui reste libre entre deux montants verticaux consécutifs ; en appelant L′ la distance horizontale entre ces montants, le treillis étant supposé à 45°, on aurait $L = L'\sqrt{2} = L \times 1.41$. En général les montants verticaux sont également espacés dans la longueur de la ferme et tombent à l'aplomb des pièces de pont, quand il y en a ; de sorte que L′ est au plus égal à $2^m.50$; donc L est au plus égal à $3^m.525$.

Le calcul conduirait donc pour a à une limite inférieure de $0^m.060$.

Ce résultat est inadmissible pour une barre plate, mais nous y avons été conduit par une pure hypothèse, car la rivure d'une barre comprimée avec toutes les barres qu'elle rencontre influe évidemment sur la résistance de cette barre à la flexion latérale, et réduit la longueur libre L à une faible fraction du maximum que nous avons adopté dans le calcul ; si L est seulement réduit au quart de sa valeur, la limite inférieure de a tombe immédiatement à $0^m.015$. Pour que cette réduction soit admissible, il suffit qu'un certain nombre de points équidistants restent fixés dans la barre, sans même qu'ils soient appelés à exercer un effort appréciable.

D'ailleurs les barres du treillis ne sont pas assimilables à des pièces dont les deux extrémités sont libres de faire un angle quelconque avec la droite qui les joint l'une à l'autre et suivant laquelle s'exerce l'effort de compression. Elles sont comme encastrées par leur rivure avec les pièces qui les rattachent aux bandes horizontales et à la paroi verticale à l'aplomb de la culée ; les montants verticaux maintiennent encore ces barres en divers points de leur longueur ; de sorte que l'application du calcul est encore attaquable à ce

point de vue, et doit conduire à des résultats exagérés.

Enfin les deux systèmes de barres, rivés l'un à l'autre, forment en réalité un système unique, et ce qui se passe dans l'un d'eux influe nécessairement sur l'autre. Admettons pour un instant une flexion dans les barres comprimées; cette flexion ne peut se produire qu'en entraînant une flexion pareille dans les barres étendues; or la flexion des barres étendues ne peut avoir lieu sans que l'extension de ces barres n'augmente, car nous devons admettre que les montants verticaux de la poutre s'opposent à toute variation de hauteur de la ferme. Ainsi le résultat nécessaire d'une flexion latérale du treillis, c'est l'augmentation des tensions dans toutes les barres du système étendu. Mais il doit y avoir toujours équilibre dans chaque section transversale de la poutre entre l'effort tranchant, les tensions des barres étendues et les compressions des barres comprimées; si donc les tensions augmentent, comme l'effort tranchant reste toujours le même, et que d'ailleurs les directions des forces ne subissent aucun changement appréciable, il faut bien que les compressions diminuent, c'est-à-dire que la flexion latéralé diminue elle-même. Cette flexion, si elle est possible, est donc du moins limitée à une très-faible quantité, puisque, dès qu'elle commence, l'excès de tension qui se développe dans les barres étendues vient soulager les barres comprimées et prévient par suite l'augmentation de la flexion.

La théorie de la flexion latérale des pièces comprimées par leurs abouts est, comme on le sait, assez grossière; on aurait tort d'ailleurs de croire que toute pièce ainsi comprimée et commençant à fléchir, soit pour cela assimilable aux pièces que l'on considère habituellement pour établir cette théorie. On y suppose en effet que la force comprimante ne reçoit aucune altération par suite de la flexion initiale qu'elle provoque, de sorte que la théorie n'est ap-

plicable avec tant soit peu de rigueur que si cette condition est remplie.

Par exemple, une poutre métallique posée sur deux appuis et chargée de poids, prend sous cette charge une flèche d'un centimètre. On pose une pièce de bois debout sous le milieu de cette poutre, pour la soulager. Il est clair que, quelque faible que soit cette pièce additionnelle, sa flexion latérale, si elle commence, est essentiellement limitée ; car dès que l'extrémité supérieure aurait tassé d'un centimètre, la poutre métallique ayant pris toute sa flèche, n'agirait plus sur la pièce de bois, et ne pourrait plus y produire une courbure. Ici donc la flexion commence, et s'arrête à un point parfaitement défini, quand la poutre a pris une flèche moindre que la flèche qu'elle aurait si l'on supprimait entièrement le support.

Quelque chose d'analogue a lieu dans les deux systèmes de barres du treillis, à cause de leur intime solidarité. Le danger contre lequel on cherche à prémunir les constructeurs de treillis est ainsi un danger illusoire. L'expérience du reste prouve que, dans les conditions ordinaires, les déviations latérales du treillis, s'il y en a, sont renfermées dans des limites extrêmement étroites. Les treillis sont souvent composés de barres qui s'infléchissent pour passer de part et d'autre de la feuille qui les rattache aux tables horizontales. Ce tracé est à coup sûr défavorable, puisque la compression des barres d'un système tend à les courber davantage, tandis que l'extension des barres de l'autre système tend à les redresser ; mais en résulte-t-il quelque inconvénient pour la stabilité du pont ? Le seul que l'on puisse citer est la nécessité où l'on se trouve de renforcer les rivets qui unissent les deux systèmes, et peut-être, dans l'avenir, de les remplacer plus souvent que les rivets des autres parties de la construction. Mais la résistance de la ferme n'en reçoit aucune espèce d'atteinte. Nous pensons donc que la substitution de fers à T, de cornières, ou de rails Barlow aux

barres plates d'un treillis lattice, est inutile et entraîne dans des dépenses sans résultat. Le treillis double, autre solution destinée à prévenir la flexion des barres, présente aussi un inconvénient assez grave, celui de la complication des assemblages. Un treillis simple, roidi par des montants verticaux qu'on utilise d'ailleurs pour le contreventement et l'entretoisement des fermes, est peut-être encore la solution la plus satisfaisante du problème des ponts à grande portée, toutes les fois qu'on ne se résigne pas à l'emploi plus économique des ponts à poutre pleine.

CHAPITRE VII.

CALCUL DES PONTS AMÉRICAINS DU SYSTÈME DE HOW.

Les ponts américains du système de How sont composés comme il suit dans chaque ferme (*fig.* 4) :

Deux longerons, l'un supérieur AA′, l'autre inférieur BB′;

Des boulons équidistants MN, M′N′, qui tendent à rapprocher les deux longerons;

Des croisillons EF, E′F′, dans chaque entre-boulon, buttant contre des coussinets E, E′, F, F′, traversés par les boulons; les croisillons s'opposent au rapprochement des longerons.

Tel est le système réduit à ses parties essentielles : mais on peut former une poutre américaine à doubles croisillons, ou à triples croisillons, comme les *fig.* 5 et 6 le représentent. Ces systèmes sont dérivés du système à croisillons simples, que nous nous bornerons à étudier avec quelque détail.

Nous supposons une poutre américaine chargée de poids, et posée sur deux ou sur un plus grand nombre d'appuis de niveau. Coupons cette poutre par deux plans verticaux, perpendiculairement à l'axe de la pièce, et menés par les milieux de deux entre-boulons consécutifs; puis introduisons

dans les sections coupées des forces égales aux réactions moléculaires supprimées par le fait de cette coupure.

Appelons (*fig.* 7) H_k la force de compression du longeron supérieur dans l'entre-boulon n° k;

F_k la compression du longeron inférieur dans ce même entre-boulon; P_k la compression de la barre montant de gauche à droite, et Q_k la compression de la barre descendant de gauche à droite dans l'entre-boulon n° k; les mêmes lettres, avec l'indice $k-1$, désigneront les compressions analogues dans l'entre-boulon n° $k-1$, qui se trouve à gauche de l'entre-boulon n° k.

R_k représentera la tension du boulon n° k, qui sépare ces deux entre-boulons; chaque boulon aura toujours, dans nos calculs, un indice égal au numéro de l'entre-boulon qui vient immédiatement à sa droite.

Appelons encore :

α l'angle constant formé par les barres des croisillons avec la verticale ;

p le poids supporté par la poutre par unité de longueur, que l'on suppose constant au moins dans tout l'intervalle compris entre les milieux de deux entre-boulons successifs. Si p est variable dans d'autres intervalles semblables, on devra donner à p l'indice du boulon qui partage en deux la longueur à laquelle le poids p se rapporte ;

a la longueur constante d'un entre-boulon quelconque ;

h la hauteur de la poutre, mesurée verticalement entre les lignes d'axe des deux longerons.

Nous pourrons écrire les conditions d'équilibre qui sont au nombre de trois :

Équation des composantes horizontales :

$$H_{k-1} + F_{k-1} + P_{k-1} \sin\alpha + Q_{k-1} \sin\alpha = H_k + F_k + P_k \sin\alpha + Q_k \sin\alpha.$$

Équation des composantes verticales :

$$P_{k-1} \cos\alpha + Q_k \cos\alpha = pa + Q_{k-1} \cos\alpha + P_k \cos\alpha,$$

Équation des moments par rapport à un point quelconque, par rapport au point B, par exemple :

$$(H_{k-1} - H_k)h + (P_{k-1} - Q_k)h \sin\alpha = 0.$$

Ces trois équations ne comprennent pas R_k ; pour déterminer cette force, il faut supposer le boulon coupé, et poser les équations d'équilibre des forces qui agissent sur l'un des points A ou B. Pour n'avoir pas à distinguer plusieurs cas, suivant que le poids pa de l'entre-boulon est tout entier en haut des fermes, en A, ou tout entier concentré au point B, ou enfin partagé entre les deux longerons, nous supposerons qu'on connaît d'avance la décomposition du poids p entre les deux longerons, et nous appellerons p' la portion de ce poids qui s'applique exclusivement au longeron d'en haut, et p'' celle qui s'applique au longeron inférieur. Le complément de l'étude des pressions se fera donc au moyen de l'une ou l'autre des équations :

$$(P_{k-1} + Q_k)\cos\alpha = R_k + p'a,$$
$$(Q_{k-1} + P_k)\cos\alpha + p''a = R_k,$$

qui rentrent l'une dans l'autre en vertu de la seconde équation posée plus haut, en observant que $p' + p'' = p$.

Laissant de côté pour le moment la recherche de la tension R_k, nous avons trois équations pour lier entre elles les forces H_k, Q_k, P_k, F_k, de l'entre-boulon n° k avec les forces H_{k-1}, Q_{k-1}, P_{k-1}, F_{k-1}, de l'entre-boulon précédent. Si l'on suppose connu ce second groupe de forces, il faudra pour achever de déterminer les quatre forces du premier groupe attribuer une valeur arbitraire à l'une d'entre elles. L'indétermination du problème est facile à expliquer, en observant qu'on est maître de donner au boulon n° k telle tension qu'on veut, d'où résulte une nouvelle équation qui, jointe aux trois premières, détermine les quatre inconnues. Nous sommes donc maîtres de faire une hypothèse sur le

règlement de la pièce, et celle que nous ferons consistera à admettre que la compression dans la barre descendante du croisillon est nulle dans chaque entre-boulon ; nous pouvons donc poser $Q_{k-1} = 0$ et $Q_k = 0$.

Nous nous plaçons donc dans le cas limite où les barres qui descendent de gauche à droite reposent sur les coussinets sans y exercer aucun effort. Les équations se simplifient dans cette hypothèse et deviennent :

$$(1) \quad H_k - H_{k-1} + F_k - F_{k-1} + (P_k - P_{k-1}) \sin \alpha = 0 ,$$

$$(2) \quad (P_k - P_{k-1}) \cos \alpha + pa = 0 ,$$

$$(3) \quad H_k - H_{k-1} = P_{k-1} \sin \alpha .$$

L'équation (2) donne la loi de variation des forces P d'un entre-boulon à l'autre ; l'équation (3) donne la loi de variation de la force H, ou de la compression dans le longeron supérieur ; enfin, si l'on remplace dans l'équation (1) la différence $H_k - H_{k-1}$, par sa valeur fournie par l'équation (3), on a l'équation :

$$(4) \quad F_k - F_{k-1} + P_k \sin \alpha = 0$$

qui indique la loi de variation des forces F.

On remarque sur-le-champ :

1° Que la différence $P_k - P_{k-1}$ est négative et constante ; nous supposons ici que p est constant dans toute l'étendue où nous considérons la poutre ; la valeur générale de la quantité variable P est donc donnée par un terme d'une progression arithmétique dont la raison est $-\frac{pa}{\cos \alpha}$;

2° Que la différence $H_k - H_{k-1}$ est égale à $P_{k-1} \sin \alpha$; les différences des valeurs successives de la variable H sont donc les termes successifs de la progression arithmétique $P \sin \alpha$, et par suite la valeur générale de H est donnée par

la formule de la sommation des termes de cette progression ;

3° Que la différence $F_k - F_{k-1}$ est donnée par la fonction $-P_k \sin\alpha$, laquelle représente aussi le terme général de la même progression arithmétique, changé de signe et avancé d'un rang.

Ces remarques permettent d'écrire, à des constantes près, P_0, H_0, F_0, les expressions générales de la valeur des inconnues.

$$(5) \qquad P_k = P_0 - \frac{pa}{\cos\alpha} k,$$

$$(6) \qquad H_k = H_0 + kP_0 \sin\alpha - \frac{k(k-1)}{2} patga,$$

$$(7) \qquad F_k = F_0 - kP_0 \sin\alpha + \frac{k(k+1)}{2} patga.$$

Les constantes arbitraires P_0, H_0, F_0 devront être déterminées dans chaque cas particulier de manière à satisfaire aux conditions de l'équilibre extérieur de la pièce sur ses appuis.

Nous allons développer cette méthode en l'appliquant au cas le plus usuel d'une poutre à travée unique, ayant une portée l divisée en n entre-boulons égaux chacun à $\frac{l}{n}$.

Le poids pa étant supposé appliqué à deux demi-entre-boulons successifs, nous admettrons que les deux demi-entre-boulons voisins des culées ne supportent aucune charge, ou que leur charge est directement supportée par les culées. Le poids total porté par la poutre est donc seulement $pa\,(n-1)$; et par suite les réactions des culées sont égales à $\frac{pa\,(n-1)}{2}$. La réaction de la culée de gauche s'exerce sur la poutre par l'intermédiaire de la barre mon-

tante du croisillon n° 1 ; de sorte que l'on a pour l'équilibre :

$$P_1 \cos\alpha = \frac{pa(n-1)}{2},$$

d'où résulte :

$$P_1 = \frac{pa(n-1)}{2\cos\alpha}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (5) en y faisant préalablement $k = 1$, on trouve :

$$P_0 = \frac{pa(n+1)}{2\cos\alpha},$$

et par suite :

$$(8) \qquad P_k = \frac{pa(n-2k+1)}{2\cos\alpha}.$$

P_k doit toujours rester positif, car les barres inclinées, n'étant que posées sur les coussinets, ne peuvent exercer sur eux qu'une pression et non une tension. La formule (8) ne doit donc être employée que jusqu'à la plus grande valeur de k qui donne pour P_k un résultat positif.

Deux cas sont à distinguer ici, suivant que n est pair ou impair.

Si n est pair et égal à $2n'$, la plus grande valeur qu'on puisse assigner à k est n', et l'on a :

$$P_1 = \frac{pa}{\cos\alpha}\,\frac{n-1}{2},$$

$$P_2 = \frac{pa}{\cos\alpha}\,\frac{n-3}{2},$$

$$P_3 = \frac{pa}{\cos\alpha}\,\frac{n-5}{2},$$

$$\vdots$$

$$P_{n'} = \frac{pa}{\cos\alpha} \times \frac{1}{2}.$$

Au delà du boulon du milieu de la portée, P deviendrait négatif, ce qui est impossible ; il faut admettre alors qu'il y a interversion entre les rôles des barres des croisillons, ce qui, du reste, est d'accord avec la symétrie de la poutre et de la charge par rapport au plan vertical qui divise la portée en deux parties égales : ce sont donc les barres descendantes qui exercent un effort, et les barres montantes qui doivent reposer sans pression sur les coussinets dans toute la seconde moitié de la travée.

Si n est impair et égal à $2n' + 1$, la plus grande valeur qu'on puisse attribuer à K est n', et l'on a :

$$P_1 = \frac{pa}{\cos\alpha}\,\frac{n-1}{2},$$

$$P_2 = \frac{pa}{\cos\alpha}\,\frac{n-3}{2},$$

.

.

.

$$P_{n'} = \frac{pa}{\cos\alpha} \times 1.$$

Le terme suivant $P_{n'+1}$ serait nul, et les termes au delà seraient négatifs ; ce qui démontre que dans les poutres à un nombre impair d'entre-boulons, les deux barres du croisillon central ne portent rien, et qu'il y a renversement dans les rôles des deux barres d'un côté à l'autre de ce croisillon central.

On remarquera aussi que les pressions $P_{n'}$, $P_{n'-1}$, $P_{n'-2}$,... .... P_1, sont proportionnelles aux nombres impairs successifs, lorsque n est pair, et aux nombres naturels, n est impair.

Les formules (6) et (7) font connaître les valeurs générales de H et de F dès qu'on a assigné des valeurs convenables aux constantes H_0 et F_0. Dans le cas spécial dont

nous nous occupons, on remarquera que H_1 doit être nul puisque le longeron supérieur ne vient buter sur aucun point qui puisse y développer une pression ; et que la force F_1, doit tenir en équilibre la composante horizontale $P_1 \sin \alpha$ de la barre inclinée du premier croisillon ; cette condition est nécessaire pour que la poutre repose verticalement sur sa culée sans exercer sur elle de poussée latérale. Donc $F_1 = -P_1 \sin \alpha$, ce qui démontre que F_1 est en réalité une tension et non une compression, comme nous l'avions admis jusqu'ici. Il en est de même de toutes les valeurs de F. Introduisant ces valeurs particulières dans les équations (6) et (7), il vient d'abord :

$$H_0 = -pa \operatorname{tg} \alpha \times \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad F_0 = 0,$$

et ensuite :

$$H_k = pa \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{(n+1)}{2} (k-1) - \frac{k(k-1)}{2} \right),$$

$$F_k = -pa \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{(n+1)}{2} k - \frac{k(k+1)}{2} \right).$$

On observera, d'après ces relations, que $F_k = -H_{k+1}$, de sorte que les deux séries de valeurs de H et de F sont, au signe près, les mêmes : mais cette relation doit être modifiée à partir du milieu de la portée, comme nous le reconnaîtrons plus bas.

La solution que nous venons de donner est complète pour toute poutre américaine à croisillons simples, reposant sur deux appuis de niveau, lorsque les pieds qu'elle porte sont concentrés sur les boulons. Nous y ajouterons cependant une remarque qui conduit peut-être à une méthode plus élégante et plus rapide pour le calcul des coefficients de $pa \operatorname{tg} \alpha$ dans les valeurs de H_k et de F_k.

Ces coefficients sont composés de deux termes : le premier est le terme général d'une progression arithmétique, le second est, au signe près, le terme sommatoire de la progression arithmétique des nombres naturels de 1 à

$k-1$ ou à k. Les deux termes pris ensemble forment, comme nous allons le voir, une série récurrente dont l'échelle de relation est facile à déterminer.

Plus généralement, soit deux progressions arithmétiques :

$$(a) \quad m, \quad m+t, \quad m+2t, \ldots\ldots, \quad m+(l-1)t, \ldots\ldots,$$
$$(b) \quad f, \quad f+\theta, \quad f+2\theta, \ldots\ldots, \quad f+(l-1)\theta, \ldots\ldots$$

et proposons-nous de trouver la loi de formation de la série obtenue en ajoutant d'une manière générale le l^{me} terme de la progression (a) à la somme des l premiers termes de la progression (b) ; si l'on appelle u_l le l^{me} terme de cette nouvelle série, on voit que la différence $u_l - u_{l-1}$ de deux termes consécutifs de la série (u) est égale au l^{me} terme de la série (b) augmenté de la différence constante des termes de la série (a). Donc les différences secondes des termes de la série (u) sont constantes, et égales à la différence constante de la série (b) ; donc les différences troisièmes sont constamment nulles, et l'on a par conséquent entre quatre termes consécutifs :

$$u_l = 3u_{l-1} - 3u_{l-2} + u_{l-3}.$$

Telle est la loi au moyen de laquelle on déduira chaque terme de la série (u) des termes précédents.

Il résulte de là que les termes de la série (u) sont les coefficients numériques de la lettre ordonnatrice x dans la série que l'on obtient en divisant un polynome du second degré en x par le polynome $1 - 3x + 3x^2 - x^3$, qui n'est autre chose que le cube du binome $1-x$.

En effet, on a identiquement :

$$(u_1 + u_2x + u_3x^2 + u_4x^3 + \ldots\ldots + u_lx^{l-1} + \ldots\ldots)$$
$$(1 - 3x + 3x^2 - x^3)$$
$$= u_1 + u_2 \;\Big|\; x \;+\; u_3 \;\Big|\; x^2$$
$$- 3u_1 \;\Big|\; - 3u_2 \;\Big|$$
$$+ 3u_1 \;\Big|$$

Le produit n'a que trois termes, car les coefficients $u_4 - 3u_3 + 3u_2 - u_1$, $u_5 - 3u_4 + 3u_3 - u_2$, etc. des puissances de x supérieures à la seconde sont tous nuls en vertu de la remarque faite plus haut.

u_1, u_2, u_3 peuvent être exprimés en fonction des arguments des séries (a) et (b), et le polynome du second degré que l'on obtient au produit est égal à l'expression :

$$M = (m + f) + (t - 2m + \theta - f)\,x + (m - t)\,x^2.$$

Si donc on divise ce polynome par $1 - 3x + 3x^2 - x^3$, en les ordonnant l'un et l'autre par rapport aux puissances ascendantes de x, les coefficients numériques de x dans les termes successifs du quotient seront les valeurs des termes u_1, u_2, u_3 ... de la série cherchée.

Pour revenir de ces généralités à la recherche spéciale des coefficients de $\pm pa\,\mathrm{tg}\,a$ dans les expressions de H et de F, nous remarquerons que, dans ce cas particulier, les séries (a) et (b) deviennent :

$$(a) \quad 0, \quad \frac{n+1}{2}, \quad (n+1), \quad \frac{(n+1)\times 3}{2}, \quad \ldots\ldots$$

$$(b) \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots\ldots$$

De sorte qu'on a :

$$m = 0, \qquad t = \frac{n+1}{2},$$

$$f = 0, \qquad \theta = -1.$$

Donc,

$$m = \frac{n-1}{2}\,x - \frac{n+1}{2}\,x^2,$$

et la division de ce polynome par $1 - 3x + 3x^2 - x^3$ donnera les valeurs numériques des coefficients de $pa\,\mathrm{tg}\,a$ dans l'expression de H ; pour en déduire les valeurs des coefficients applicables à F, il faut avancer d'un rang dans la série, et changer les signes, ce qui revient encore à diviser

$$-\frac{n-1}{2}+\frac{n+1}{2}x \quad \text{par} \quad 1-3x+3x^2-x^3. \qquad (*)$$

Par exemple, si l'on demande de calculer les forces F et H pour une poutre de 12 entre-boulons, on devra, pour trouver les coefficients de $\pm pa\,\mathrm{tg}\,\alpha$, diviser $\frac{11}{2}x-\frac{13}{2}x^2$ par $1-3x+3x^2-x^3$, ce qui donne pour résultat :

$$\frac{\frac{11}{2}x-\frac{13}{2}x^2}{1-3x+3x^2-x^3}=\frac{1}{2}\left(\frac{11x-13x^2}{1-3x+3x^2-x^3}\right)=$$

$$\frac{1}{2}(0+11x+20x^2+27x^3+32x^4+35x^5+36x^6+\ldots\ldots).$$

Il ne faut pas oublier 0 comme premier terme indépendant

(*) On peut encore transformer cette méthode, en décomposant en fractions plus simples la fraction rationnelle :

$$\frac{M}{(1-x^3)^3}.$$

On a en effet identiquement, A, B, C étant des constantes connues:

$$\frac{A+Bx+Cx^2}{(1-x)^3}=\frac{A+B+C}{(1-x)^3}-\frac{B+2C}{(1-x)^2}+\frac{C}{1-x}.$$

De sorte que les coefficients de x dans le quotient sont respectivement égaux aux sommes des coefficients des développements des fractions :

$$\frac{1}{(1-x)^3},\quad \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(1-x)}$$

multipliés respectivement par les constantes:

$$A+B+C-B-2C \quad \text{et} \quad C.$$

En effectuant les divisions, on trouve les trois suites indéfinies :

$$\frac{1}{(1-x)^3}=1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+21x^5+\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{(1-x)}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\ldots\ldots$$

Les coefficients de x sont dans la première les nombres trian-

de x dans le quotient. Il résulte de là que les valeurs successives de H sont :

1er entre-boulon.	2e	3e	4e	5e	6e
$0,$	$\frac{11}{2}pa\operatorname{tg}\alpha,$	$\frac{20}{2}pa\operatorname{tg}\alpha,$	$\frac{27}{2}pa\operatorname{tg}\alpha,$	$\frac{32}{2}pa\operatorname{tg}\alpha,$	$\frac{35}{2}pa\operatorname{tg}\alpha,$

et les valeurs successives de F :

$$-\frac{11}{2}pa\operatorname{tg}\alpha \quad -\frac{20}{2}pa\alpha\operatorname{tg}\alpha, -\frac{27}{2}pa\operatorname{tg}\alpha, -\frac{32}{2}pa\operatorname{tg}\alpha, \frac{35}{2}-$$

$$-pa\operatorname{tg}\alpha, -\frac{36}{2}pa\operatorname{tg}\alpha.$$

Si l'on continuait la division, on retrouverait les mêmes coefficients dans un ordre inverse.

Pour démontrer ce théorème, reprenons la série (u), et cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle soit symétrique, ce qui peut avoir lieu de deux manières : 1° ou bien à partir d'un de ses termes u_l, tous les termes suivants sont respectivement les mêmes que les pré-

---

gulaires; dans la seconde, les nombres naturels ; dans la troisième, ils sont tous égaux à l'unité ; nous retrouvons là les trois premières lignes du triangle arithmétique de Pascal, triangle qu'on peut prolonger une fois pour toutes aussi loin qu'on veut, ce qui sera utile pour déterminer d'avance les valeurs de F et de H dont un entre-boulon quelconque sans calculer leurs valeurs dans les entre-boulons précédents ; dans l'exemple que nous proposons ci-dessus, on a :

$$A=0, \quad B=\frac{11}{2}, \quad C=-\frac{13}{2};$$

si l'on demande le coefficient du cinquième terme du développement de la fraction $\frac{M}{(1-x)^3}$ en série, on voit tout de suite que le coefficient est :

$$15\times\left(0+\frac{11}{2}-\frac{13}{2}\right)+5\times\left(-\frac{11}{2}+13\right)+1\times\left(-\frac{13}{2}\right)=16,$$

ce qui est vérifié par le calcul direct.

cédents pris dans l'ordre rétrograde ; 2° ou bien deux termes consécutifs u_{l-1}, u_l ont la même valeur, et les termes qui suivent le terme u_l sont, dans l'ordre inverse, égaux aux termes qui précèdent le terme u_{l-1}.

1° Dans le premier cas, on aura $u_{l+1} = u_{l-1}$, $u_{l+2} = u_{l-2}$, et ainsi de suite ; or on a toujours entre les trois termes consécutifs u_{l+1}, u_l, u_{l-1}, u_{l-2} :

$$u_{l+1} = 3u_l - 3u_{l-1} + u_{l-2},$$

d'où l'on tire, en remplaçant u_{l+1} par u_{l-1} qui lui est supposé égal :

$$4u_{l-1} = 3u_l + u_{l-2}.$$

Réciproquement si cette condition est remplie, on voit que u_{l+1} sera égal à u_{l-1}, et par suite u_{l+2} à u_{l-3}, u_{l+3} à u_{l-3}, etc., et que la série aura la propriété d'être symétrique par rapport au terme u_l.

Or il est facile de reconnaître qu'on a les équations :

$$u_l = m + (l-1)\,t + lf + \theta\,\frac{l(l-1)}{2},$$

$$u_{l-1} = m + (l-2)\,t + (l-1)\,f + \theta\,\frac{(l-1)(l-1)}{2},$$

$$u_{l-2} = m + (l-3)\,t + (l-2)\,f + \theta\,\frac{(l-2)(l-3)}{2}.$$

Il s'agit donc de savoir s'il existe une valeur entière de l qui satisfasse à l'équation de condition que nous venons de poser.

Le résultat des substitutions dans cette équation est en définitive :

$$2t + 2f + \theta\,(2l-1) = 0.$$

C'est la condition nécessaire et suffisante cherchée.

On voit qu'elle se réduit à ce que le nombre $\frac{2(t+f)}{\theta}$ soit un entier impair.

Dans le cas spécial qui nous occupe, θ est toujours égal à -1. Il faut donc et il suffit que le nombre $2(t+f)$ soit impair, ou que $t+f$ soit égal à un impair divisé par 2 ; or c'est ce qui arrive toujours lorsque n est pair, car $t=\frac{n+1}{2}$ et $f=0$.

Lorsque n est pair, la série formée par les coefficients de $p\,a\,tg\alpha$ dans les valeurs de H et F est donc symétrique par rapport à l'un de ses termes, le $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{me}$ pour la série des coefficients de H, et le $\left(\frac{n}{2}\right)^{me}$ pour la série des coefficients de F.

2° L'autre genre de symétrie a lieu lorsque deux termes consécutifs u_{l-1}, u_l sont égaux dans la série (u) ; ce qui suffit pour que $u_{l-2}=u_{l+1}$, $u_{l-3}=u_{l+2}$, et ainsi de suite.

Pour que cette condition soit remplie, on voit en retranchant la valeur de u_{l-1} de la valeur de u_l, qu'il faut et qu'il suffit que l'équation : $t+f+\theta(l-1)=0$ fournisse pour l une valeur entière ; θ étant égal à -1, il suffit pour cela que $t+f$ soit entier, ou, puisque $f=0$, que $n+1$ soit divisible par 2 ; ou enfin que n soit impair ; dans ce cas, les deux termes égaux sont les termes $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{me}$ et $\left(\frac{n+3}{2}\right)^{me}$ pour les coefficients de H, et les termes $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{me}$ et $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{me}$ pour les coefficients de F.

Si l'on poussait la division du trinome du second degré par le polynome $1-3x+3x^2-x^3$, au delà des termes qui correspondent à la moitié de la portée, le calcul donnerait donc dans tous les cas les coefficients déjà obtenus, que n soit pair ou impair ; et il y a un *coefficient central* si n est pair, tandis qu'il n'y en a pas si n est impair.

De là une remarque curieuse sur les forces H et F.

1° Quand n est pair, le coefficient central qui donne la plus grande valeur de H est le $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{me}$ coefficient du quotient commençant par le terme o, et ce coefficient s'applique à la portion de longeron qui suit le $\left(\frac{n}{2}\right)^{me}$ entre-boulon ; or la symétrie de la poutre et de son chargement exige que les deux forces $H_{\frac{n}{2}}$ et $H_{\frac{n}{2}+1}$ soient égales. Cette apparente contradiction s'explique en remarquant que le boulon central de la poutre la partage en deux moitiés où les actions des croisillons sont renversées l'une par rapport à l'autre ; de sorte que la valeur de la compression déduite du calcul des coefficients n'est pas la valeur de la compression dans la partie de longeron comprise dans l'entre-boulon n° $\left(\frac{n}{2}+1\right)$, mais qu'elle est seulement la pression totale développée dans la section du longeron au milieu de la poutre, par l'arc-boutement des deux barres, l'une montante, l'autre descendante des deux entre-boulons contigus. La série des coefficients donne donc, par son terme central, la pression qui s'applique à une longueur infiniment petite du longeron, au milieu de la portée ; c'est pour ainsi dire la *poussée à la clef* de la poutre.

Les forces F ne présentent pas la même particularité ; car la force $F_{\frac{n}{2}+1}$ s'applique au longeron inférieur dans l'entre-boulon n° $\frac{n}{2}$; mais il faut appliquer cette même force à l'entre-boulon suivant, n° $\left(\frac{n}{2}+1\right)$, et à partir de là, on aura toujours entre les forces F et H la relation $F_{k+1} = -H_k$, applicable toutes les fois que K surpasse $\frac{n}{2}$, parce qu'alors les croisillons travaillent à l'inverse de l'effort qu'ils exerçaient dans la première moitié de la poutre.

2° Quand n est impair, nous avons vu que les deux barres qui se croisent dans l'entre-boulon central n'exercent aucun effort sur les coussinets, et qu'en même temps la série des coefficients servant à calculer H et F n'a pas de terme central. On trouvera seulement les mêmes valeurs pour le $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{me}$ et pour le $\left(\frac{n+3}{2}\right)^{me}$ terme des coefficients de H ; mais ces deux valeurs égales correspondent l'une et l'autre à l'entre-boulon central. Là encore, à cause du renversement du travail des croisillons, il faut admettre que les forces $H_{\frac{n+1}{2}}$ et $H_{\frac{n+3}{2}}$ déduites du calcul des coefficients s'appliquent à un seul et même entre-boulon, celui du milieu, dans lequel la portion du longeron supérieur qui y est comprise arc-boute les forces égales $P_{\frac{n-1}{2}}$ et $Q_{\frac{n+3}{2}}$; de sorte que la valeur assignée par ce calcul pour $H_{\frac{n+3}{2}}$ n'est pas la valeur de H pour le $\left(\frac{n+3}{2}\right)^{me}$ entre-boulon, mais bien pour le précédent.

De même que le calcul des coefficients donne deux forces égales à $H_{\frac{n+1}{2}}$ pour le longeron supérieur dans l'entre-boulon central, il assigne deux forces égales à $F_{\frac{n-1}{2}}$ pour le longeron inférieur dans les trois entre-boulons du centre,

$$n^{o}\left(\frac{n-1}{2}\right), \quad n^{o}\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad \text{et} \quad n^{o}\left(\frac{n+3}{2}\right).$$

Deux exemples éclairciront ces remarques.

Posons pour abréger $pa\,tg\alpha = \Pi$, et $\frac{pa}{\cos\alpha} = \Pi'$, et proposons-nous de déterminer les efforts auxquels sont soumises les pièces de charpente dans un pont américain de 12 entre-boulons égaux à a.

n étant pair, nous disposerons le calcul comme il suit :

Fraction génératrice des coefficients de π :

$$\frac{0+\frac{n-1}{2}x-\frac{n+1}{2}x^2}{(1-x)^3}=\frac{0+\frac{11}{2}x-\frac{13}{2}x^2}{(1-x)^3}.$$

Nous avons déjà effectué cette division.

NUMÉROS des entre-boulons.	NUMÉROS DES TERMES correspondants dans la série.		VALEURS SUCCESSIVES			Observations.
	Longeron supérieur.	Longeron inférieur.	de H. Compression.	de F. Extension.	de P. Compression.	
1er entre-boulon	1er terme. .	2e terme. . .	0	$11\times\frac{\Pi}{2}$	$11\times\frac{\Pi'}{2}$	
2e	2e.	3e.	$11\times\frac{\Pi}{2}$	$20\times\frac{\Pi}{2}$	$9\times\frac{\Pi'}{2}$	
3e	3e.	4e.	$20\times\frac{\Pi}{2}$	$27\times\frac{\Pi}{2}$	$7\times\frac{\Pi'}{2}$	
4e	4e.	5e.	$27\times\frac{\Pi}{2}$	$32\times\frac{\Pi}{2}$	$5\times\frac{\Pi'}{2}$	
5e	5e.	6e.	$32\times\frac{\Pi}{2}$	$35\times\frac{\Pi}{2}$	$3\times\frac{\Pi'}{2}$	
6e	6e.	7e.	$35\times\frac{\Pi}{2}$	$36\times\frac{\Pi}{2}$	$\frac{\Pi'}{2}$	
. . . . .	7e.	. . . . .	$36\times\frac{\Pi}{2}$	. . . . .	(Valeurs de Q.)	(a)
7e	8e.	7e.	$35\times\frac{\Pi}{2}$	$36\times\frac{\Pi}{2}$	$\frac{\Pi'}{2}$	
8e	9e.	8e.	$32\times\frac{\Pi}{2}$	$35\times\frac{\Pi}{2}$	$3\times\frac{\Pi'}{2}$	
9e	10e.	9e.	$27\times\frac{\Pi}{2}$	$32\times\frac{\Pi}{2}$	$5\times\frac{\Pi'}{2}$	
10e	11e.	10e.	$20\times\frac{\Pi}{2}$	$27\times\frac{\Pi}{2}$	$7\times\frac{\Pi'}{2}$	
11e	12e.	11e.	$11\times\frac{\Pi}{2}$	$20\times\frac{\Pi}{2}$	$9\times\frac{\Pi'}{2}$	
12e	13e.	12e.	0	$11\times\frac{\Pi}{2}$	$11\times\frac{\Pi'}{2}$	

(a) Boulon central ou clef.

Supposons ensuite que la poutre ait 11 entre-boulons au lieu de 12 ; la fraction génératrice sera dans ce cas

$$\frac{5x - 6x^2}{(1-x)^3} = 0 + 5x + 9x^2 + 12x^3 + 14x^4 + 15x^5 +$$

$$+ 15x^6 + 14x^7 + 12x^8 + 9x_9 + 5x^{10} + 0 - \ldots\ldots$$

NUMÉROS des entre-boulons.	NUMÉROS DES TERMES correspondants dans la série.		VALEURS SUCCESSIVES			Observations.
	Longeron supérieur.	Longeron inférieur.	de H. Compression.	de F. Extension.	de P. Compression.	
1er entre-boulon	1er terme. .	2e terme.. .	0	5 × Π	5 Π′	
2e	2e.	3e.	5 × Π	9 × Π	4 Π′	
3e	3e.	4e.	9 × Π	12 × Π	3 Π′	
4e	4e.	5e.	12 × Π	14 × Π	2 Π′	
5e	5e.	6e.	14 × Π	15 × Π	1 Π′	
6e	6e et 7e. . .	6e et 7e. . .	15 × Π	15 × Π	P et Q = 0 Valeurs de Q	(a)
7e	8e.	7e.	14 × Π	15 × Π	1 Π′	
8e	9e.	8e.	12 × Π	14 × Π	2 Π′	
9e	10e.	9e.	9 × Π	12 × Π	3 Π′	
10e	11e.	10e.	5 × Π	9 × Π	4 Π′	
11e	12e.	11e.	0	5 × Π	5 Π′	

(a) Entre-boulon central.

Pour déterminer les tensions des boulons, ou les valeurs de R, il faut distinguer deux cas.

On a toujours :

$$R_k = (P_{k-1} + Q_k)\cos\alpha - p'a.$$

Si donc n est pair, on donnera à k la valeur $\frac{n+1}{2}$, pour avoir la tension du boulon central, et l'on aura en ce point :

$$P_{\frac{n}{2}} = Q_{\frac{n}{2}+1} = \frac{1}{2}\,\frac{pa}{\cos\alpha},$$

donc

$$R_{\frac{n}{2}+1} = pa - p'a = a(p-p') = p''a.$$

Mais partout ailleurs, l'une des deux quantités P_{k-1} et Q_k est supposée nulle ; on a, par exemple, dans la moitié de gauche de la poutre :

$$R_k = \frac{pa(n - 2k + 3)}{2} - p'a.$$

Au terme négatif $-p'a$ près, R_k est égal au poids total de $\frac{n-2k+3}{2}$ entre-boulons, ou à la moitié $pa \times \frac{n-1}{2}$ du poids total de la poutre, moins le poids total de $k-2$ entre-boulons.

Lorsque n est impair, il n'y a pas de boulon exceptionnel au milieu de la portée, et la formule précédente s'applique sur toute une moitié de la poutre.

La recherche des valeurs de R se fait donc sans aucune ambiguïté au moyen de la formule la plus générale qui donne R en fonction de P et Q.

Pour les valeurs de P au contraire, nous avons vu qu'il y avait deux cas à distinguer, n pair et n impair, et que, dans les deux, après le milieu de la pièce, le calcul donne les valeurs de Q au lieu de celles de P. La marche du calcul est affranchie de cette distinction et reprend toute sa généralité si l'on convient de regarder une valeur négative de P prise positivement comme indiquant la valeur convenable de Q dans le même entre-boulon. Cette convention est d'ailleurs conforme au jeu ordinaire des signes + et — dans les formules ; le changement de signe de P, ne pouvant s'interpréter par la substitution d'une tension à une pression, s'interprète par la substitution d'un système de barres à l'autre dans chaque croisillon.

Grâce à cette interprétation, on n'a qu'à considérer dans une poutre américaine uniformément chargée et posée sur deux appuis qu'une seule et même progression arithmétique des valeurs de $P, P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$; si n est pair, il n'y a

pas de terme du milieu, et aucune valeur de P n'est nulle ; si n est impair, il y a un terme du milieu, lequel est nécessairement nul, ce qui correspond à l'entre-boulon central, où les deux barres des croisillons n'exercent ni l'un ni l'autre d'efforts sur les coussinets.

Pour éviter toute erreur en passant des valeurs de P aux valeurs de F et de H, il est bon de partager tout d'abord la poutre en deux parties, l'une où les valeurs de P sont positives, l'autre où elles sont négatives et correspondent aux barres renversées. On place ensuite dans chacune de ces portions les valeurs successives de F et de H à partir de l'appui qui termine la portion considérée, en marchant vers le centre de la poutre.

Jusqu'à présent nous n'avons pas eu besoin de déterminer le *moment fléchissant* de la pièce en un point donné. Cette notion est sinon nécessaire, du moins utile pour le calcul des poutres américaines continues de plusieurs travées. Elle s'introduit d'ailleurs sans aucune difficulté.

Nous avons posé plus haut l'équation générale des moments

$$(H_{k-1} - H_k)\,h + (P_{k-1} - Q_k)\sin\alpha = 0.$$

Nous avons admis ensuite que l'une des deux forces P et Q était nulle dans un même entre-boulon, et nous avons supprimé la seconde; mais nous avons reconnu ensuite qu'une valeur négative de P, prise positivement, indiquait la valeur de la compression dans la barre du système Q, la compression dans la barre du système P étant nulle. Enfin nous avons reconnu que lorsque P_k est positif, on a $F_{k-1} = -H_k$, tandis que $F_{k+1} = -H_k$ quand P_k est négatif, ou quand le travail dans les barres est renversé.

Dans l'une ou l'autre de ces hypothèses, les forces $F_{k\pm1}$ et H_k forment un couple qu'on met en évidence en coupant la poutre par un plan parallèle à la barre inclinée qui subit une compression dans l'entre-boulon. Le moment de ce

couple, $H_k \times h$, est le moment fléchissant de la section de la poutre suivant ce plan incliné.

L'équation précédente démontre que la variation du moment d'élasticité, quand on passe d'un entre-boulon au suivant, est égale à $P_{k-1} \times h \sin \alpha$.

Là où il y a renversement des barres, le moment d'élasticité est maximum, et le plan de la section peut être mené verticalement, comme s'il s'agissait d'une poutre pleine ou à treillis.

La considération des moments de rupture dans les poutres américaines permet d'appliquer aux poutres posées sur plus de deux appuis les méthodes de calcul employées pour les poutres droites continues. Il faut seulement que les travées successives se composent chacune d'un nombre entier d'entre-boulons égaux entre eux et également chargés dans une même travée. Dans ces conditions, le *théorème des trois moments* est immédiatement applicable aux poutres américaines.

On détermine d'abord les moments fléchissants sur les appuis, et ensuite les réactions partielles ou efforts tranchants exercés par les appuis dans chaque travée. On pourra alors trouver successivement, dans chacune des travées, les efforts développés dans chaque entre-boulon, et cette détermination ne peut conduire à aucun résultat contradictoire, comme nous allons le vérifier.

Appelons M et M′ les moments fléchissants trouvés pour deux appuis consécutifs, et A, la portion de la réaction du premier appui sur la travée comprise entre cet appui et le second ; soit n le nombre d'entre-boulons de cette travée ; pa le poids constant d'un entre-boulon, poids que nous supposons concentré sur chacun des $(n - 1)$ boulons ; na sera la longueur de la travée.

Nous avons :

$$P_1 = \frac{A}{\cos \alpha}$$

et

$$P_k = \frac{A - pa(k-1)}{\cos \alpha},$$

et nous venons de voir que la différence des moments de rupture dans deux entre-boulons consécutifs est égale à $P \times h \sin \alpha$; nous devrons donc avoir identiquement :

$$M' - M = \Sigma_1^n (P_k h \sin \alpha).$$

Les valeurs de P forment une progression arithmétique dont la somme est :

$$\frac{P_1 + P_n}{2} \times n = \frac{2An - pa(n-1)n}{2 \cos \alpha};$$

les valeurs trouvées pour M' et M doivent donc satisfaire à la condition :

$$M' - M = \frac{2An - pa(n-1)n}{2 \cos \alpha} h \sin \alpha = A \times na -$$

$$- \frac{n(n-1)}{2} pa^2 ;$$

en observant que $h \operatorname{tg} \alpha = a$.

Or cette équation n'est autre que l'équation des moments des forces extérieures qui sollicitent la travée lorsqu'on la coupe sur ses deux appuis, équation qui sert de base au théorème des trois moments.

Cette théorie étant bien connue, nous nous bornerons à en donner un exemple numérique.

Soit une poutre composée de trois travées : la première a trois entre-boulons, la seconde en a quatre, et la troisième deux. Chacun des boulons de la première porte un poids de 5 tonnes, chacun des boulons de la seconde, un

poids de 2 tonnes, et le boulon unique de la troisième un poids de 4 tonnes.

Les appuis intermédiaires sont supposés sans épaisseur, et tous les entre-boulons sont supposés égaux (*fig.* 8).

Si l'on désigne par M_2, M_3 les moments sur les appuis, on aura dans ce cas particulier :

$$2M_2(3+4)+4M_3=\tfrac{1}{4}(6\times 3^2+6\times 4^2)=37\tfrac{1}{2},$$
$$4M_2+2M_3(4+2)=\tfrac{1}{4}(6\times 4^2+4\times 2^2)=28,$$

ou bien

$$7M_2+2M_3=18.75,$$
$$M_2+3M_3=7.$$

Donc

$$M_2=2.224,$$
$$M_3=1.592.$$

Les formules connues donnent en résumé les résultats suivants, l'angle α étant supposé égal à 45° :

tonnes.

Moment sur la 1re pile : 2.224 × la hauteur de la poutre.
Moment sur la 2e pile : 1.592 × la hauteur de la poutre.

			tonnes.		Réactions totales des appuis. tonnes.
Réaction	de la 1re culée	sur la 1re travée	2.259	1re culée	2.259
—	de la 1re pile	sur la 1re travée	3.741	1re pile	6.899
—	de la 1re pile	sur la 2e travée	3.158		
—	de la 2e pile	sur la 2e travée	2.842	2e pile	5.638
—	de la 2e pile	sur la 3e travée	2.796		
—	de la 2e culée	sur la 3e travée	1.204	2e culée	1.204
				Poids total de la poutre.	16.000

D'où l'on déduit pour les pressions dans les différentes barres les nombres inscrits dans la *fig.* 9.

Ceux qui sont inscrits sur les barres inclinées doivent être tous divisés par cos α, ou multipliés par 1.41.

Ceux des longerons horizontaux doivent être multipliés par tg α, c'est-à-dire par l'unité.

Les nombres positifs indiquent une compression, les nombres négatifs une extension.

Cet exemple suffit pour montrer comment on doit traiter la question de l'établissement d'une poutre américaine reposant sur plusieurs appuis, et nous dispense d'insister sur ce point.

Dans tous ces calculs, nous avons toujours admis que la tension donnée au boulon était déterminée de telle sorte, que des deux barres d'un même croisillon, une seule au plus exerçât un effort. On peut donc se demander à quoi sert de placer deux barres dans chaque entre-boulon, puisque le travail d'une seule peut suffire. Pour se rendre compte de l'utilité des deux barres, il faut considérer, non plus le cas où la poutre est uniformément chargée, mais le cas où une surcharge exceptionnelle est appliquée à certains boulons sans l'être à tous. Il se passe alors un fait analogue à celui que nous avons observé pour la résistance d'un treillis lorsque la surcharge n'est pas étendue uniformément d'un bout à l'autre de la portée.

Pour traiter cette question, supposons que le boulon n° l d'une poutre d'une seule travée formée de n entre-boulons égaux, supporte un poids donné, V, par rapport auquel le poids de la poutre soit négligeable. Les équations (1) (2) et (3) se modifieront comme il suit : l'équation (2) perdra le terme pa, pour toute valeur de k inférieure à l ou supérieure à l; et pour $k = l$, pa devra être remplacé par V (*fig.* 10). Donc les P sont constants pour les $(l - 1)$ premiers entre-boulons, et restent également constants dans les l entre-boulons suivants. Le poids V se partage entre les deux culées en deux parties qui sont représentées par $\frac{(n-l)V}{n}$ pour la culée de droite, et $\frac{lV}{n}$ pour la culée de gauche : il résulte de là que la valeur de P est pour les

$(l-1)$ premiers entre-boulons, égale à $\frac{(n-l)}{n}\ \frac{V}{\cos\alpha}$; et qu'elle est égale à $-\frac{lV}{n\cos\alpha}$ pour les $(n-l+1)$ entre-boulons qui suivent. Le renversement du travail des barres a lieu ici en passant de l'entre-boulon n° $(l-1)$ à l'entre-boulon n° l; ce qui montre l'utilité des deux pièces dans l'intervalle compris entre le boulon n° l et le milieu de la travée.

P étant constant sur toute une partie de la poutre, les H, et par suite les F, sont dans toute cette partie représentés par les termes d'une progression arithmétique.

Par exemple, soit une poutre de dix entre-boulons à laquelle un poids de 10 tonnes est seul appliqué sur le boulon n° 4; on trouvera par le calcul la distribution d'efforts notée sur la *fig.* 10 aux facteurs $\operatorname{tg}\alpha$ et $\frac{1}{\cos\alpha}$ près : $(21\operatorname{tg}\alpha)$ tonnes est la pression qui se trouve produite dans le longeron supérieur dans la portion infiniment petite comprise entre les extrémités des deux barres renversées qui aboutissent sur cette région de la poutre.

Cette méthode de calcul pourrait être employée dans tous les cas; en effet, le problème général consiste toujours à chercher les pressions et tensions dues à un certain nombre de poids donnés, suspendus à des boulons déterminés. Cela étant, il suffit de calculer successivement les pressions produites en chaque point de la construction par chacun de ces poids pris séparément et de faire la somme algébrique de ces pressions partielles pour obtenir la pression résultante due à l'ensemble de ces poids. On retrouverait ainsi les formules que nous avons posées pour le cas de poids égaux et également répartis; c'est enfin la seule marche à suivre lorsque la répartition des charges est irrégulière.

Le système des ponts américains que nous venons de décrire et d'analyser présente au point de vue pratique des

inconvénients nombreux. D'abord, les ponts américains sont comme tous les ponts en charpente d'une durée restreinte, ou d'un entretien très-dispendieux. De plus ce ne sont pas des constructions qu'on puisse abandonner à elles-mêmes ; elles exigent un règlement fréquemment renouvelé, et assez délicat à faire. L'opération du règlement d'un pont américain a quelque chose d'analogue à celle de l'accord d'un piano ; il faut tendre certains boulons, en détendre d'autres. La règle qui dirige dans ces tâtonnements consiste à amener les barres *renversées*, sur chaque moitié des portées, à affleurer leurs coussinets sans y exercer d'effort ; c'est le règlement qui convient pour la charge totale également répartie. Comme les pressions dans la poutre varient suivant la position des surcharges, il faut qu'au moment où une charge mobile, un train, par exemple, entre sur le pont, un travail particulier s'opère dans toute la charpente pour réaliser les conditions de l'équilibre intérieur incessamment altérées ; certaines barres qui n'avaient pas de pression à exercer à un moment, sont appelées à en exercer d'assez fortes tout à coup, et si l'affleurement de ces barres sur leurs coussinets n'est pas convenablement assuré, il en résulte des chocs qui peuvent compromettre la durée de la construction. Mais une autre circonstance intervient aussi pour modifier l'état intérieur de la ferme : c'est la température ; les variations du thermomètre se font sentir sur les boulons, sans exercer les mêmes actions sur les barres des croisillons ; dans une poutre de grande hauteur par exemple, un refroidissement subit de la température de l'air peut provoquer dans les boulons une tension assez grande pour que la rupture s'en suive, à moins que le gardien du pont n'ait pris la précaution de desserrer les écrous en temps utile. Dans un pays comme la Russie, où la température de l'air éprouve des variations également remarquables par leur fréquence et leur amplitude, cet effet est toujours à redouter. On y remédie d'une manière

incomplète en multipliant le nombre des boulons, et en substituant le système double ou triple au système simple pour les poutres d'une hauteur exceptionnelle. Le calcul de l'établissement et du règlement de ces poutres à double ou à triple croisillons se déduit du calcul des poutres à croisillons simples en superposant les résultats du calcul successif de chaque cours de croisillons, établi en partageant la charge entre eux d'une manière à peu près égale. Il ne présente d'ailleurs pas la même régularité que le calcul des poutres simples, parce que les barres qui aboutissent sur les appuis n'ont pas toutes dans les croisillons doubles ou triples la même inclinaison.

Le système de How n'est donc un système convenable que pour les échafaudages à grande portée, parce qu'il se prête à de grandes dimensions, et que le règlement même dont il est susceptible après coup rend possible la correction des tassements qui se produisent souvent dans les constructions provisoires. Les ponts américains du chemin de fer de Moscou ont sans doute été établis à une époque où le bois était en Russie à plus bas prix qu'il n'est maintenant. Aujourd'hui la construction de nouveaux ponts du même modèle à titre définitif serait une véritable faute, d'autant plus que le type adopté sur le chemin de Moscou consiste dans l'emploi de ponts à trois fermes, disposition qui ajoute encore à la difficulté de l'entretien.

Malgré ces inconvénients, nous donnons ci-contre un relevé des dimensions principales de pièces entrant dans les ponts américains du chemin de Moscou; elles sont extraites d'un tableau, dressé par l'administration du chemin.

Pour l'intelligence de ce tableau, il est nécessaire de savoir que l'entretoisement des fermes est assuré par des croisillons horizontaux traversés par des boulons, que l'on peut aussi serrer plus ou moins. Pour les grandes portées on renforce les longerons par des sous-poutreaux dans les régions les plus fatiguées, par exemple sur les appuis.

Le type de pont américain à double croisillons représenté dans les *fig.* 11, 12, 13, 14 est imité des ponts du chemin de Moscou. Le projet, dressé dans le but de créer un passage provisoire sur la Dwina à Dunabourg, n'a pas été exécuté.

Les ajustements des pièces ont été étudiés en détail par les ingénieurs russes; la manière de faire chevaucher les joints, la profondeur des entailles à pratiquer dans les bois, etc., ont été pour eux l'objet de recherches ingénieuses, mais la plupart du temps trop méticuleuses pour qu'elles puissent avoir une grande valeur pratique. Malgré tous ces petits perfectionnements, les ponts américains du chemin de Moscou n'ont pas la rigidité qui convient à des ouvrages de chemin de fer, et quand un train doit les franchir, il est prescrit d'en ralentir la marche.

Table des dimensions principales des ponts américains du chemin de fer Nicolas.

Trois fermes. — Distance des fermes voisines, d'axe en axe : 14 pieds anglais ou $4^{m}.267$.

DÉSIGNATION DES DIMENSIONS COTÉES.	DIMENSIONS QUI CORRESPONDENT AUX OUVERTURES							
	de 300 pieds ou $91^{m}.44$.	de 275 pieds ou $83^{m}.82$.	de 200 pieds ou $60^{m}.96$.	de 175 pieds ou $53^{m}.34$.	de 150 pieds ou $45^{m}.72$.	de 100 pieds ou $30^{m}.48$.	de 55 pieds ou $16^{m}.76$.	de 30 pieds ou $9^{m}.14$.
	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
Distance entre les boulons successifs.	2.74	2.59	2.29	2.13	1.98	1.52	1.52	1.22
Hauteur des fermes.	7.01	6.71	6.10	5.49	5.18	4.27	3.05	1.83
Longueur de ferme portant sur les appuis	2.44	2.44	1.83	1.83	1.52	1.22	0.91	0.61
	centimètres.							
Section du longeron inférieur.	35 × 86	35 × 79	33 × 76	30 × 71	30 × 69	30 × 61	30 × 46	20 × 41
Section du sous-poutreau.	35 × 71	35 × 71	»	»	»	»	»	»
Section du longeron supérieur.	30 × 79	28 × 79	28 × 76	25 × 71	25 × 69	25 × 61	23 × 46	18 × 25
Section du sous-poutreau.	30 × 71	28 × 71	»	»	»	»	»	»
Section des barres des croix de Saint-André. . . .	23 × 23	23 × 23	20 × 20	20 × 20	18 × 18	18 × 18	15 × 15	13 × 13
Section des barres des croix de Saint-André pour l'entretoisement des fermes.	13 × 18	12 × 18	12 × 18	12 × 18	12 × 15	10 × 15	8 × 15	8 × 15
Hauteur et base des coussinets.	30 et 36	30 et 36	30 et 36	30 et 36	30 et 30	30 et 30	30 et 30	23 et 23
	Millimètres.							
Diamètre des boulons.	51	51	51	51	51	51	38	38

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

CHAP. I^er. Formules générales de l'équilibre intérieur d'une poutre droite à treillis, posée sur deux appuis de niveau. 4

CHAP. II. Discussion et application des formules. 11

CHAP. III. Flexion de la poutre à treillis. 19

CHAP. IV. Du poids par mètre courant et des limites des efforts dans le métal 28

CHAP. V. Calcul de l'établissement des rivures. 37

CHAP. VI. Discussion d'une objection contre les poutres à treillis. 40

CHAP. VII. Calcul des ponts américains du système de How. 45

Paris. — Imprimé par E. THUNOT et C^e, 26, rue Racine.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES POUTRES DROITES

IIIe PARTIE

COMPLÉMENT

COMPARAISON DES TYPES. USAGE DES FORMULES.
TABLES ET RENSEIGNEMENTS DIVERS. MODÈLES DE SOUMISSIONS
ET DE CAHIERS DES CHARGES.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES

POUTRES DROITES

CHAPITRE PREMIER.

COMPARAISON ENTRE LES DIVERS SYSTÈMES DE PONTS MÉTALLIQUES.

Les divers systèmes de ponts métalliques peuvent se ramener à trois types généraux :

Ponts à poutre droite;
Ponts en arc courbe;
Ponts suspendus.

Dans les ponts à poutre droite, le tablier est porté par deux ou plusieurs fermes posées sur un certain nombre de points d'appui, culées et piles, sur lesquels elles exercent des efforts à peu près verticaux. Toute section transversale de la poutre se décompose en deux régions, l'une où les fibres métalliques sont étendues, l'autre où elles sont comprimées.

Les ponts en arc de cercle reposent sur des arcs en fer ou en fonte, qui exercent sur leurs appuis une poussée horizontale en même temps qu'une pression verticale. Autant que possible, la section entière des arcs doit être soumise partout à un effort de compression.

Les ponts suspendus sont ceux où le tablier est attaché par des tiges à un certain nombre de câbles portés directement par les appuis. Généralement, les câbles exercent une traction sur des points fixes extérieurs à la construction. Les ponts appelés *bow-strings* ont avec les ponts suspendus une grande analogie, en ce que le tablier est soutenu par l'intermédiaire d'un câble; mais la traction du câble est contrebalancée par la compression d'une pièce appartenant à la construction; en réalité, le tablier est suspendu en plusieurs points, mais le système de suspension repose sur ses appuis sans y exercer d'effort latéral.

Nous allons passer en revue ces différents types en en discutant le mérite particulier.

§ 1er.

Ponts en arc de cercle et ponts suspendus.

Les ponts en arc et les ponts suspendus sont les seuls systèmes dans lesquels le métal subisse ou puisse subir partout un effort de même nature, pression dans les uns, tension dans les autres, et les seuls où l'on emprunte à des points fixes extérieurs la réaction nécessaire pour équilibrer une poussée horizontale. Il résulte de là que de tous les systèmes, ce sont ceux qui permettent d'économiser le plus de matière, et ceux qui se prêtent le mieux à la construction d'un ouvrage de peu de valeur. Cette économie, propre au type en lui-même, est encore accrue par l'emploi de la fonte pour les ponts en arc et du fil de fer pour les ponts suspendus. La fonte, à la compression, a autant de résistance que le fer, 6 à 7 kilogrammes par millimètre carré, et s'obtient à un prix bien inférieur; dans les ponts suspendus, le fil de fer peut supporter sans danger une tension de 18 kilogrammes par millimètre carré, à cause de l'excès de résistance que possède toujours, relativement à une pièce plus grosse, un fil de petit diamètre. Voilà les avantages des ponts

en arc et des ponts suspendus; mais ils ont des inconvénients qui en restreignent beaucoup l'application.

1° Ils commandent une position particulière pour le tablier, au haut de la construction pour les ponts en arc, au-dessous des câbles dans les ponts suspendus (*). Dans certaines situations, les naissances des arcs pourront donc être baignées par les hautes eaux. D'un autre côté, la construction d'un pont suspendu exige l'érection de points d'appui en maçonnerie d'une hauteur à peu près proportionnelle à l'ouverture des travées.

2° Les poussées ou les tractions horizontales, lorsqu'elles ne sont pas reportées sur des points suffisamment résistants, peuvent compromettre la stabilité de tout l'ouvrage. Ainsi, dans un pont en arc à plusieurs ouvertures, les charges en se déplaçant poussent successivement en sens opposés les divers appuis intermédiaires. Pour prévenir les oscillations des piles sous ces efforts alternatifs, on peut, comme on l'a fait dans le pont de la Theiss à Szegedin, relier l'une à l'autre deux piles consécutives par un longeron droit qui touche en son sommet l'extrados de l'arc compris entre ces deux appuis. Les piles tubulaires se prêtent parfaitement à cette addition; mais en même temps le pont perd son caractère de pont en arc, où tout le métal devrait travailler à la compression.

L'inconvénient des actions horizontales est plus grave encore dans les ponts suspendus. Ici deux effets sont à craindre : la culée peut être insuffisante pour équilibrer la traction que le câble exerce, et l'oxydation du métal, dans les régions humides où les câbles s'enfoncent, peut

(*) Il y a cependant des exceptions. A Newcastle-on-Tyne, on a placé au-dessous des arcs du pont sur lequel passe le chemin de fer un pont pour route de terre. — A Genève, le pont qui traverse le Rhône en touchant l'île Jean-Jacques Rousseau est un pont suspendu à petites portées: le tablier est posé sur des câbles qui n'ont qu'une faible flèche.

aller jusqu'à la destruction des câbles et à la chute du pont tout entier.

L'attache des câbles est une difficulté des plus sérieuses ; c'est par là qu'un grand nombre de ponts suspendus ont péri.

Il est utile qu'on puisse visiter le câble dans les puits où il est amarré : condition qui est loin d'être remplie dans la plupart des ponts suspendus construits avec trop de parcimonie à une certaine époque. On ne l'a pas négligée dans les grands ponts construits plus tard. Dans le pont Saint-Christophe, sur le Scorf, à Lorient, par exemple, les câbles ne sont attachés nulle part ; ils font partie d'un seul et même écheveau : un seul fil, non interrompu, suit chaque câble en particulier, et fait le tour de chaque culée, en passant dans des galeries d'un accès facile.

3° Les trépidations sont nuisibles à la résistance de la fonte. Aussi faut-il, dans les projets d'arcs destinés aux passages des trains, remplir les tympans de manière à contrarier les oscillations que tend à prendre l'arc métallique lors du passage d'un poids en mouvement. La masse du pont est à cet égard une garantie de stabilité. Néanmoins, le fer semble aujourd'hui préférable à la fonte pour la construction des arcs.

Les ponts suspendus, tels qu'on les construisait habituellement il y a peu d'années, forment un système des plus déformables. Les charges agissent sur un point unique des câbles, et les câbles n'ont, dans des directions normales à leur longueur, qu'une résistance insignifiante. La forme parabolique qu'ils prennent ne permet pas de les réunir au tablier par des liens diagonaux. On gêne un peu les oscillations en plaçant de biais les poutrelles ; les deux extrémités d'une même poutrelle n'agissent plus alors à la fois sur des points dont les oscillations soient entièrement concordantes. On obtient aussi par cet artifice une répartition des charges sur une longueur un peu plus grande de tablier.

Les garde-corps en croix de Saint-André sont destinés de même à donner au tablier une certaine roideur; mais généralement les assemblages à mi-bois qu'on pratique dans les croix de Saint-André réduisent beaucoup l'utilité de cette addition. Pour lui donner toute son efficacité, il faudrait pour ainsi dire doubler le pont suspendu d'une véritable poutre américaine. Enfin on a imaginé récemment de donner de la rigidité aux câbles eux-mêmes. Pour cela on emploie le fer en barres au lieu du fil de fer, et l'on pose deux câbles parallèles qu'on entretoise l'un avec l'autre, par des barres découpant leur intervalle en triangles à peu près égaux. Ce système est appliqué à Vienne par le passage de la voie qui joint la gare du Nord aux gares des lignes de Raab et de Trieste; un autre pont de ce système est en construction dans la même ville.

En général, les ponts suspendus sont des ouvrages qu'il importe de surveiller très-attentivement, et sur lesquels le passage des charges doit se faire à très-petite vitesse. L'économie de la construction est donc rachetée par un très-grave inconvénient, et malgré quelques exceptions plutôt apparentes que réelles, ils ne conviennent point aux chemins de fer (*).

4° Les variations de température altèrent la poussée des arcs en même temps que leurs flèches, et dans certains cas elles peuvent amener les arcs à ne plus poser sur leurs appuis que par une arête de la surface des naissances; la construction chargée par en haut peut n'avoir plus alors toute l'assiette qui lui est nécessaire.

Dans les ponts suspendus, la température fait varier la

(*) Quelques ponts suspendus que l'on trouve en Angleterre doivent leur rigidité à un excès de matière. Le système n'a plus alors le mérite de l'économie, le seul qu'on puisse lui accorder. — Il est juste d'observer pourtant que le système des ponts suspendus est celui qui permet de franchir les plus grandes portées.

longueur des câbles, les fait glisser sur leurs appuis, et déforme le tablier par suite des variations de longueur des câbles et des altérations inégales de la longueur des tiges de suspension.

5° Le montage d'un pont en arc de cercle se fait généralement de la manière suivante : les arcs, assemblés à plat sur le chantier, sont transportés à proximité des appuis, enlevés et déposés à leur place. Le montage des ponts à poutre droite se fait d'un plus grand nombre de manières, et laisse plus de latitude au constructeur pour profiter de toutes les circonstances locales.

Le montage d'un pont suspendu se fait soit en composant le câble sur place, soit en le formant dans un chantier spécial pour le poser ensuite. Dans l'un et l'autre cas, c'est une opération délicate et dans laquelle il y a toujours lieu de craindre des malfaçons nuisibles à la durée de l'ouvrage.

§ 2.

Ponts à poutre droite.

Les ponts à poutre droite n'exercent pas de poussée horizontale sur leurs appuis, du moins dans les températures moyennes; les variations de température donnent lieu à des poussées qui restent toujours très-faibles, pourvu qu'on interpose entre la poutre et ses appuis des rouleaux ou des glissières laissant toute liberté à la dilatation du métal. On fixe seulement les poutres sur l'un de leurs appuis voisins du centre de leur longueur totale. Pour donner la même liberté à la voie, il suffit, à l'entrée et à la sortie du pont, de fendre en long chaque rail sur une petite longueur, et de laisser l'une des moitiés glisser le long de l'autre en suivant le mouvement général du pont.

Le montage des ponts à poutre droite peut se faire d'une infinité de manières.

On peut construire le pont directement en place, en élevant d'abord un échafaudage analogue aux cintres des ponts en maçonnerie.

On peut construire les poutres à plat sur échafaudage, à côté de leur place définitive; il ne reste plus alors qu'à les lever.

On peut les construire à plat sur chantier, les lever, et enfin les amener en place, soit en les roulant sur le remblai, soit en les faisant flotter.

On peut encore construire une poutre continue, et la pousser sur ses appuis au fur et à mesure de son avancement, et même il est possible de faire servir la poutre à la construction de ses appuis successifs. C'est ce qu'on a fait au pont de Fribourg : la poutre continue était poussée jusqu'à ce qu'elle ait, sur le dernier appui posé, une saillie égale à la longueur d'une travée; elle était roidie par des haubans, et servait d'appontement pour descendre les éléments de la colonne métallique qui devait former l'appui suivant.

La forme de poutre droite laisse aux cours d'eau le plus grand débouché possible.

C'est la forme qui convient le mieux aux passages des fleuves pour lesquels les fondations sont difficiles; les piles en rivière ne sont jamais sollicitées au renversement, ce qui convient particulièrement aux fondations tubulaires. Les effets des tassements, s'il s'en produit, sont plus faciles à réparer que dans tout autre système.

Pour les petites portées, la poutre droite est de toutes les formes celle qui demande le moins d'épaisseur pour les tabliers des ponts. Aussi est-elle employée de préférence à toute autre à la rencontre des voies qui se croisent lorsqu'on n'a pas grande liberté pour faire varier leurs différents niveaux.

Enfin, la poutre droite est entièrement indifférente au biais des ouvrages.

Les ponts à poutre droite se prêtent à une multitude de dispositions particulières.

On peut placer le tablier :

1° Au bas des fermes;
2° A mi-hauteur des fermes ;
3° Au haut des fermes.

1° Quand le tablier est au bas des fermes, il est soutenu par des pièces transversales appelées *pièces de pont.* Si la ferme n'a qu'une faible hauteur, elle forme garde-corps de chaque côté du tablier ; mais cette disposition n'est admissible que pour des hauteurs libres de fermes très-limitées. Au delà d'une certaine hauteur, la poutre doit être contreventée par le haut, ce qui suppose une hauteur totale assez grande pour qu'on puisse entretoiser les deux fermes conjuguées par-dessus la voie.

Quelques constructeurs attachent les pièces de pont au-dessous de la semelle inférieure des fermes. Cette méthode est peu rationnelle, car il est avantageux de donner à la ferme toute la hauteur disponible pour la construction.

Les ponts pour chemin de fer ont en général deux voies. Tantôt on les réunit sur un tablier unique en les plaçant toutes deux sur les mêmes pièces de pont. La pièce de pont a dans ce cas une longueur de 7 à 8 mètres, et une hauteur qui ne doit pas descendre au-dessous de $0^{m},70$. Cette grande longueur donne de l'élasticité à la pièce de pont. La disposition que nous décrivons présente en outre plusieurs avantages. D'abord elle permet de prolonger en ligne droite les deux voies aux abords des ponts, sans les dévier; elle conduit de plus à une économie de métal. Un pont de chemin de fer est rarement soumis dans l'exploitation à une surcharge totale sur les deux voies à la fois. En général une seule voie est chargée intégralement, l'autre restant vide. La surcharge se répartit alors inégalement entre les deux fermes qui supportent le tablier.

et la totalité du métal contribue toujours à supporter ce poids additionnel. Il n'en est pas de même pour un pont à deux tabliers indépendants, le passage d'un train sur une voie n'utilisant en rien l'élasticité de l'autre voie. Par cette raison on pourrait sans danger réduire d'un tiers environ les surcharges admises pour une voie unique, quand on les applique aux tabliers à double voie. Il est vrai que, par contre, les pièces de ponts sont plus longues que pour une simple voie, et sont aussi un peu plus lourdes. Un autre avantage des ponts qui ont deux voies sur un même tablier, c'est qu'ils ont une grande largeur transversale, ce qui permet d'augmenter en proportion leur hauteur.

Les ponts à tabliers indépendants ont des pièces de pont de $4^{m},65$ environ de portée. L'entre-voie est plus grande sur le pont qu'aux abords, et par suite les voies doivent s'écarter pour entrer chacune sur le tablier qu'on lui destine, puis se rapprocher après qu'elles en sont sorties, ce qui fait deux courbes à inflexion. Ce système demande un peu plus de métal que le système à tablier unique; mais il a l'avantage de faciliter l'entretien du pont, et de permettre l'ajournement de la construction d'une moitié de l'ouvrage.

La disposition mixte qui consiste à avoir trois fermes, dont l'intermédiaire soutient à la fois les deux tabliers, a les inconvénients des ponts à deux tabliers séparés, en ce qui concerne la déviation des voies aux abords; elle est moins économique que le système à tablier unique; elle ne donne ni la possibilité d'ajourner une partie de la construction, ni aucune facilité pour l'entretien. Enfin elle ne présente aucun avantage.

2° La position de la voie à mi-hauteur des fermes permet d'entretoiser les fermes par-dessous le tablier; le haut des fermes s'élève en garde-corps au-dessus des rails. Telle est la coupe du pont de Langon, sur la Garonne. On pense qu'elle a pour effet de réduire, lors du passage des trains,

la communication des vibrations dans le métal des fermes.

3° Lorsque la voie est au haut des fermes, on peut ou bien supprimer les pièces de pont, et faire porter directement chaque rail sur une ferme; les accotements doivent alors être en encorbellement sur les fermes extérieures; on les soutient par des bras qui aboutissent au garde-corps.

Ou bien donner aux fermes un espacement un peu différent de celui des rails, et poser les voies sur de petites poutrelles en fer à double T, prolongés de manière à comprendre aussi la largeur de l'accotement. On obtient par là plus d'élasticité dans le tablier, en perdant il est vrai un peu de hauteur pour les fermes.

Enfin lorsque, par une raison quelconque, on ne peut employer que deux fermes pour soutenir les deux voies, ce qui a lieu par exemple quand les fermes doivent reposer sur deux colonnes métalliques, on les réunit par en haut par une véritable pièce de pont.

Dans tous les cas, on n'est jamais embarrassé pour les entretoisements, qui peuvent prendre toute la hauteur de la poutre au-dessous du tablier.

§ 3.

Hauteur de la poutre droite.

Dans certains ponts à poutre droite, la hauteur de la poutre n'est pas la même en tous les points de la portée; elle est maximum au milieu, et elle se réduit à quelques centimètres sur les appuis. On en voit un exemple remarquable dans le pont construit à Athlone, sur le Shannon, pour le passage de la ligne de Dublin à Galway. Mais cette disposition est loin d'être entièrement satisfaisante, et l'on peut y faire plusieurs objections.

La forme d'égale résistance qu'on a l'habitude de donner aux pièces de fonte telles que balanciers de machine à vapeur, bielles, jambes de force, etc., n'est plus aussi con-

venable dans les constructions en tôle; en effet, il est préférable, quand on emploie le fer laminé, d'obtenir l'égalité de résistance en faisant varier d'une section à l'autre l'épaisseur ou le nombre des tôles assemblées. La hauteur de la section est un des éléments principaux de la résistance; généralement, plus elle est grande, plus elle permet d'économiser de matière, et ce principe s'applique à toutes les sections de la poutre, à celles qui sont voisines des culées comme à celles qui sont au centre de la portée. Il y a donc un avantage assuré à donner partout à la poutre toute la hauteur qu'elle peut avoir, sauf à réduire les épaisseurs en proportion des efforts que chaque point des diverses sections doit subir.

La forme parabolique pour le dessus des poutres droites a de plus le double inconvénient de restreindre à une faible longueur la région où il est possible d'entretoiser les fermes par le haut, et d'exiger que les fermes soient coupées sur tous les appuis. Au point de vue de l'économie, elle est donc très-inférieure à la forme de poutre droite continue à plusieurs travées.

La poutre tubulaire qui franchit le détroit de Menai a reçu aussi une hauteur variable. L'arête supérieure de cette poutre dessine une parabole dont le sommet se trouve au-dessus de l'appui central. La hauteur, qui excède à peine 7 mètres aux deux bouts du pont, dépasse 9 mètres au milieu. Cette altération de hauteur n'a eu d'autre objet que de donner au pont un aspect un peu plus satisfaisant.

En définitive, la forme la plus convenable pour une poutre droite est celle qui donne à la poutre une hauteur uniforme. Cette hauteur varie généralement du huitième au douzième de la portée; en moyenne on peut prendre le dixième. Dans les cas où l'on est gêné par des conditions particulières, on descend au-dessous du rapport du douzième, mais alors les flèches prises par la poutre tendent à devenir de plus en plus grandes.

La hauteur ne doit pas excéder une fois et demie environ la largeur du pont, de sorte que les ponts à un seul tablier pour les deux voies, dont la largeur hors œuvre atteint 9 mètres, permettent de donner aux poutres une hauteur de 13 à 14 mètres, tandis que les ponts à tabliers indépendants, qui n'ont quelquefois que 6 mètres de large, conduisent à des hauteurs de 9 mètres au maximum.

Enfin, si la voie est au bas des fermes, il faut compter de $0^m.60$ à $0^m.80$ pour l'épaisseur du tablier, et si on limite à $1^m.70$ la hauteur libre de la poutre en garde-corps, on voit que le maximum de la portée qu'on peut franchir sans contreventement supérieur serait, avec la proportion du dixième, égal à

$$(0.80 + 1.70) \times 10 \text{ ou à } 25 \text{ mètres.}$$

Au delà il faudrait un contreventement supérieur, lequel devrait être situé à $4^m.50$ environ au-dessus du plan des rails; ajoutant $0^m.30$ pour épaisseur de ce contreventement, on a pour hauteur totale, au minimum,

$$0.80 + 4.50 + 0.30 = 5^m.60;$$

ce qui correspond à une portée de $5,60 \times 10$ ou de 56 mètres.

Ces limites n'ont rien d'absolu, puisque l'épaisseur du tablier, celle du contreventement, et le rapport de la hauteur à la portée, sont des éléments très-variables d'un pont à l'autre. Elles montrent pourtant que les portées comprises entre 25 et 50 mètres sont peu commodes pour la construction de ponts où la voie soit au bas des fermes.

§ 4.

Poutres pleines et treillis des divers systèmes.

Les ponts à poutre droite sont à poutre pleine ou à treillis.

Nous avons déjà, dans la seconde partie, page 17, comparé ces deux systèmes au point de vue de l'économie du métal. Nous avons reconnu qu'à égalité de résistance, la poutre pleine est plus économique que le treillis. En pratique, le résultat de la comparaison peut quelquefois être différent. Il peut arriver en effet que le calcul assigne à la paroi pleine d'une poutre une épaisseur si petite qu'on ne puisse l'adopter dans la construction; car on ne peut pas mettre moins d'une tôle pour l'âme d'une poutre. La poutre pleine aurait alors un grand excès de résistance à l'effort tranchant, et elle serait moins économique qu'un treillis, qui, concentrant la matière sur un petit nombre de lignes, la ferait travailler partout dans des conditions meilleures. Le treillis assurerait du moins une économie sur le poids; cette économie pourrait être rachetée par une plus grande dépense dans le travail du montage.

Le vrai défaut de la poutre pleine, pour les grands ouvrages, est l'aspect même de l'ouvrage.

Le treillis peut être à mailles serrées ou à mailles lâches; il peut être à barres plates ou à barres de forme plus étudiée; il peut être simple ou double.

L'avantage qu'on trouve à serrer les mailles d'un treillis est de réduire le poids des barres prises individuellement. On est quelquefois amené, quand la maille est lâche, à donner aux barres un poids supérieur à la limite du poids qu'on peut manier au laminoir. On est alors forcé de diviser la barre dans le sens de la longueur, ce qui revient à augmenter le nombre total des barres. Il y a aussi moins de discontinuité dans la transmission des efforts quand le treillis est

serré que quand les barres sont très-écartées. Par contre, la roideur des pièces augmente avec leurs dimensions, lesquelles sont d'autant plus grandes que le nombre des barres est plus petit.

Les barres plates, proscrites par certains constructeurs, ont été adoptées dans un grand nombre de ponts sans qu'il en résulte aucun inconvénient réel. Ce qu'il faut, c'est ne pas demander aux barres un travail exagéré. Les ponts, comme on en voit, où la barre de treillis supporte plus de 6 kilogrammes par millimètre carré, et où elle est fixée par un seul rivet aux cornières des tables horizontales, sont exposés à des avaries qu'il était facile de prévoir d'avance. Ajoutons que le ferraillement observé dans certains ponts à treillis, près des culées et près des piles, doit être attribué, non au système de treillis pris en lui-même, mais à l'oubli du calcul préalable d'un point essentiel, la résistance à l'écrasement dans les sections horizontales des parties portant directement sur les appuis. Dans plusieurs ouvrages insuffisamment étudiés, il a fallu compléter après coup, par l'addition d'armatures en fonte, l'ossature de la poutre sur ses appuis. L'avantage même des constructions en fer résulte de ce que tout peut y être calculé, de telle sorte qu'on arrive à proportionner partout la quantité de matière aux efforts que cette matière aura à subir. Le système ainsi composé est voisin de l'équilibre strict; il faut donc que tous les points y soient traités avec un soin égal: autrement une insuffisance en un point particulier se trahit sur-le-champ par une déformation ou par un accident plus grave. Les économies sont admissibles quand elles sont réalisées par un emploi plus intelligent de la matière, et non quand elles résultent de suppressions ou de réductions arbitraires dans des pièces qui toutes ont leur utilité.

Lorsqu'on n'emploie pas les barres plates, on se sert pour les treillis de fers à T, ou de rails Barlow, ou enfin de barres en $\cap$; ce dernier type se rencontre en Autriche sur

le réseau de la Compagnie des chemins de fer de l'État. Les barres des deux systèmes sont rivées à la jonction des semelles plates qui s'appliquent l'une contre l'autre, et la partie cylindrique de l'$\sqcap$ leur donne de la roideur dans tous les sens. L'aspect des ponts construits dans ce système est très-satisfaisant, grâce aux jeux d'ombre et de lumière produits par les saillies des parties courbes du treillis. La poutre n'a pas de montants verticaux, inutiles pour la roidir. Dans les derniers ponts construits sur le réseau, les barres du treillis, inclinées à 45° sur la verticale au centre de la portée, se redressent graduellement jusqu'à 25° près des appuis. La maille, carrée au milieu de la poutre, forme une suite de losanges de plus en plus aigus, à mesure qu'ils se rapprochent des deux bouts de la travée. Cette disposition est critiquable, aussi bien que celle qui consiste à faire varier la hauteur d'une poutre d'un point à l'autre de sa longueur. Le minimum du poids du treillis correspond à une inclinaison de 45° dans toute section, et la variation de l'angle des barres avec la verticale ne saurait être économique. Elle peut conduire, il est vrai, à adopter dans tout le pont un même modèle de barres; mais, outre qu'elle donne un excès de poids, elle nuit à l'aspect de la poutre. De loin, l'œil cherche dans ces treillis une surface cylindrique découpée diagonalement en carrés égaux, qui se présenteraient en vraie grandeur au centre de la poutre, et en raccourci vers les extrémités.

Les fers spéciaux se prêtent plus difficilement que les fers plats aux variations des sections. Ils ont aussi l'inconvénient de toutes les formes exceptionnelles : fabrication plus difficile, prix de revient plus élevé, pose plus délicate.

Le treillis peut être double ou simple; le treillis double est le système qui assure aux fermes la plus grande rigidité. L'âme de la ferme est dédoublée, et ses deux parois parallèles sont entretoisées l'une avec l'autre, barre comprimée à barre comprimée, par une série d'éléments qui en

découpent l'intervalle en triangles équilatéraux. Ce système a été appliqué au pont de Drogheda, sur la Boyne, en Irlande, et à un grand nombre d'autres ouvrages.

Un système mixte de treillis double a été employé au pont de Pokroff, sur la Kliazma (Russie). Ce système consiste à entretoiser les deux âmes en treillis plat d'une même ferme par un double T vertical, placé à l'aplomb des pièces de pont successives.

Le seul inconvénient de ces divers systèmes est la complication des tracés et les sujétions du montage.

Les ponts à poutre pleine peuvent aussi recevoir une âme double. On est quelquefois conduit à ce dédoublement par l'insuffisance de la hauteur libre de la poutre. Il faut alors séparer en deux la table supérieure. Cette solution a été adoptée pour le pont du Tagliamento, sur le chemin de fer qui rattache la ligne de Vienne à Trieste à la ligne de Venise à Vérone. On n'avait là qu'une faible hauteur disponible entre le plan des rails et le niveau des hautes eaux. Le rail est noyé entre deux poutres jumelles, dont les parois verticales se réunissent en bas à une semelle commune. Des cloisons placées de distance en distance entretoisent ces deux parois. Cette disposition est incommode, et l'on ne s'y résigne que quand la hauteur libre pour les fermes est tout à fait insuffisante.

Les ponts à poutre droite comprennent encore un grand nombre de types que nous ne pouvons tous passer en revue. Nous nous bornerons à citer, pour compléter cette nomenclature,

Le pont de Mayence, qui repose sur une poutre armée, analogue à la *baleine;*

Les systèmes américains de poutres droites, armées pardessous à la manière des arbalétriers d'une toiture;

Enfin le *Crumlin viaduct.* Ce pont est pour ainsi dire le dernier degré du treillis à mailles lâches; la poutre y est réduite à une série de triangles égaux juxtaposés.

Ces deux derniers systèmes ne paraissent pas appelés à un grand avenir ; ils n'ont pas la rigidité nécessaire au passage des trains ; ils ont de plus un inconvénient très-grave : la rupture d'une pièce peut entraîner la chute de l'ouvrage entier.

Nous avons déjà discuté, I^re^ partie, page 81, la question de la continuité des travées, et nous n'avons pas à revenir sur ce sujet.

§ 5.

Bow-strings.

Le nom de *bow-string* (corde de l'arc) s'applique, en Angleterre, aux ponts à poutre droite, lorsque l'arête supérieure des poutres a la forme d'un arc de cercle dont l'arête inférieure dessine la corde ; mais nous l'employons ici pour désigner un système particulier de ponts imaginé par Brunel.

Le pont de Chepstow, construit sur la Wye, à son embouchure dans la Severn, sur la ligne du sud du pays de Galles, a une portée de 92^m^.95. La poutre pleine qui supporte le tablier, repose sur les deux culées ; de plus, en deux points de sa longueur, elle est soutenue par des haubans attachés à une poutre tubulaire cylindrique franchissant la même ouverture. Cette poutre tubulaire a une légère courbure dans le plan vertical ; elle pose sur deux appuis, à l'aplomb des deux culées, et elle y exercerait une certaine poussée horizontale, si les haubans inclinés qui des extrémités du tube vont rejoindre le tiers de la portée totale de la poutre inférieure, n'exerçaient pas sur le tube une traction qui tient cette poussée en équilibre. Le pont de Chepstow n'est en définitive qu'une poutre droite armée d'une manière particulière ; la grande hauteur de l'armature suffit pour expliquer la roideur que cette construction possède. Le pont pèse plus de 5 tonnes par mètre courant.

Le pont de Saltash, jeté sur un bras de mer qui sépare le comté de Cornouailles du Devonshire, est le type du véritable bow-string, tel que nous l'entendons dans ce paragraphe. Il se compose de deux travées de 139 mètres chacune; elles portent toutes deux sur un appui central pour la construction duquel on a employé un caisson à air comprimé. Le tablier est à plus de 30 mètres au-dessus des hautes mers. Un arc tubulaire en tôle, à section elliptique, a sa poussée équilibrée par la tension d'un polygone funiculaire analogue à la chaîne des ponts suspendus. Ces deux parties forment une poutre armée, solidement entretoisée par des liens diagonaux.

Le tablier est une poutre droite, pleine, formant garde-corps sur la voie; il est soutenu par un certain nombre de tiges accrochées les unes au câble, les autres à l'arc tubulaire. L'assemblage d'une même tige avec les deux parties principales de la construction, tube et câble, ne permet pas de savoir exactement comment se répartit la tension des tiges entre les deux pièces qui contribuent à les soutenir.

Le pont de Saltash pèse environ 10 tonnes par mètre courant.

Le système de Brunel n'a d'autre avantage qu'une roideur très-grande; il a de nombreux inconvénients: c'est un système encombrant, difficile à construire, peu commode à poser, et qui doit être traité avec une parfaite précision dans tous les assemblages. Enfin les bow-strings sont coupés sur tous leurs appuis, et par conséquent ne permettent pas de mettre à profit la continuité des travées pour réduire le poids du métal. Toutes ces raisons empêcheront le succès définitif de ce type.

TABLEAU POUR SERVIR A LA COMPARAISON DES DIVERS SYSTÈMES DE PONTS MÉTALLIQUES.

Ponts tubulaires à poutre droite, en tôle pleine, de Stephenson.

Pont Britannia, sur le détroit de Menai. — 2 tubes, un pour chaque voie.

4 travées: 2 de rive à 73^{m}.72; 2 centrales à 143^{m}..80.

Hauteur des fermes: variable de 7^{m}.02 à 9^{m}14.

Poids par mètre courant de voie simple . . . . . { grandes portées. . . . 11 250 kil. / petites portées . . . . 8 600 » / moyenne générale . . 10 320 »

Pont-Victoria, sur le Saint-Laurent (Canada). — 25 travées, coupées sur 14 appuis; portée centrale, entièrement libre, de 100^{m}.58; 2 tubes, un pour chaque voie.

Dimensions d'un tube : base, 4^{m}.877 : hauteur, 5^{m}.637 (légèrement variable). — Le tracé présente une pente et une contre-pente de 0^{m}.008 jusqu'au milieu du pont.

Poids par mètre courant du tube de la portée centrale : environ 7 000 kil.

Bow-string de Brunel.

Pont de Saltash (Royal Albert). — 2 portées de 138^{m}.684 l'une ; distance du tube elliptique à la chaîne, au centre de la portée : d'axe en axe, 17^{m}.145.

Dimension de l'ellipse formant la section du tube . . . . . { grand axe (horizontal). 5^{m}.102 / petit axe. . . . . 3^{m}.657

Un montant au centre de la portée; les autres sont distribués symétriquement à des distances qui varient de 11^{m}.963 à 12^{m}.039 ; il y en a 5 de chaque côté du montant central.

Poids total par mètre courant de simple voie, environ 10 tonnes.

Pont en tôle pleine.

Pont de Langon (chemin de fer du Midi). — 2 travées de rive de 63^{m}.40, une centrale de 75^{m}.70.

Hauteur des fermes, 5^{m}.50.

Poids par mètre courant de simple voie, 1 900 kil.

Pont à poutre parabolique à treillis.

Pont d'Athlone (Midland Great-Western Railway, Irlande). — 2 portées principales de 50^{m}.29 de longueur et de 6^{m}.148 de hauteur centrale ; 1 tablier unique pour les deux voies.

Distance des fermes, 8^{m}.48.

Intervalle des pièces de pont, 1^{m}.22.

Poids par mètre courant de simple voie, 1 825 kil.

Pont à poutre droite en treillis.

Pont sur l'Eipel (ligne du Sud-Est de l'Autriche). — 3 portées : 2 de rive à 44^{m}.55 ; 1 centrale de 56^{m}.88.

Hauteur des fermes, 6^{m}.95.

Poids par mètre courant de simple voie, 1 400 kil. — Barres de treillis en $\sqcap$.

Arcs en tôle.

Pont de Szegedin, sur la Theiss (même ligne). — 8 arches de 41^{m}.479 de portée et 5^{m}.137 de flèche.

4 fermes par arche pour les deux voies.

Poids par mètre courant de simple voie, 1 634 kil.

Arcs en fonte.

Pont de Tarascon, sur le Rhône. — 7 arches de 60 mètres d'ouverture et de 5 mètres de flèche ; 8 arcs en fonte par arche.

Poids par mètre courant de simple voie, y compris le plancher eu fonte, 8 630 kil.

CHAPITRE II.

USAGE DE LA FORMULE

$$p' = p'' \times \frac{\frac{3}{16}\frac{l^2}{H'R} + \frac{5}{8}\frac{l}{R'} + \frac{H}{R''}}{\frac{1}{\varpi(1+K)} - \left(\frac{3}{16}\frac{l^2}{H'R} + \frac{5}{8}\frac{l}{R'} + \frac{H}{R''}\right)}.$$

§ 1.

Cette formule, trouvée II[e] partie, chapitre IV, pages 28 et suivantes, donne le poids minimum p' d'une poutre droite en treillis d'une portée l, et d'une hauteur H, supportant un poids p'' également réparti par unité de longueur, sous des pressions et tensions dont les limites sont R, R', R'', dans les tables de la poutre, dans le treillis, enfin dans la section horizontale au-dessus des appuis.

H' est une hauteur un peu moindre que H, et qu'on peut confondre avec H, moyennant une réduction convenable de la limite R.

ϖ est le poids par unité de volume du métal entrant dans la poutre.

Le coefficient K, tel que nous l'avons défini, est destiné à tenir compte des entretoises, des pièces de pont, des couvre-joints, et autres parties qui n'ont pu être prévues dans l'établissement de la formule. Cette définition a une trop grande étendue. En effet, de toutes les parties imprévues, les unes, les couvre-joints, les rivures, les montants verticaux et les entretoises, ont par mètre courant un poids à peu près proportionnel au poids propre de la ferme; les autres, telles que les pièces de pont, dépendent du type du pont et nullement de la portée. Au lieu de comprendre dans le coefficient K tout ce que nous y avons supposé d'abord, il vaut donc mieux n'y faire entrer que *les accessoires proportionnels à* p', sauf à réunir à la surcharge p'' *le poids par mètre courant des parties qui ne varient pas avec la portée.*

Dans cette nouvelle hypothèse, la formule peut être conservée en regardant p'' comme la somme de la surcharge accidentelle et de ce qu'on pourrait appeler la *surcharge permanente*, comprenant le poids des voies et du tablier.

S'il s'agit d'une poutre pleine au lieu d'une poutre à treillis, on peut remplacer le coefficient $\frac{5}{8}$ par $\frac{5}{16}$, ce qui revient à conserver ce coefficient tel qu'il est, et à doubler R'.

Cette formule donne des poids moindres que ceux que l'on adopte habituellement. Un tel résultat était facile à prévoir : pour établir cette équation, on a supposé que tout le métal subissait un effort voisin du maximum de celui qu'il peut développer. On a dû obtenir par conséquent le poids minimum correspondant à des limites de charges déterminées.

On remarquera d'ailleurs que la formule peut donner des poids p' aussi grands qu'on voudra; il suffit pour cela de réduire les limites R, R', R''. Le poids p' croît à mesure que ces limites diminuent, et la formule a toujours l'avantage de faire connaître le poids propre qui correspond aux limites données, et la décomposition précise de ce poids en quatre parties : bandes horizontales, paroi verticale, parties portant sur les appuis, et enfin, accessoires.

Le coefficient K est variable d'un projet à un autre. Peut-être la moyenne, o.3o, que nous avions proposée, est-elle un peu faible; nous prendrons o.4o dans l'exemple qui suit.

Exemple du calcul du poids minimum d'une poutre en treillis :

Portée 6o mètres. . $l = 6o.$
Hauteur 5 — . . H = 5.

Limites des efforts dans le métal :

R = 6 ooo ooo kil. par mètre carré dans les bandes (on confondra H avec H').
R' = 5 ooo ooo kil. dans le treillis.
R'' = 3 5oo ooo » au-dessus des appuis.

ϖ est toujours égal à 7800 kilogrammes pour les ponts en fer.

Soit enfin $p'' = 2000$ kilogrammes par mètre courant, la poutre étant supposée soutenir la moitié seulement du poids d'une voie. Nous supposons d'ailleurs la surcharge permanente comprise dans cette valeur de p''.

On déduit de ces valeurs numériques :

$$\frac{1}{\varpi(1+K)} = 0.000\,091\,57.$$

$$\frac{3}{16}\frac{l^2}{H'R} = 0.000\,022\,50.$$

$$\frac{5}{8}\frac{l}{R'} = 0.000\,007\,50.$$

$$\frac{H}{R''} = 0.000\,001\,43.$$

Total . . . . . 0.000 031 43.

$$p' = p'' \times \frac{0.000\,031\,43}{0.000\,091\,57 - 0.000\,031\,43} = 2000 \times \frac{3143}{6014} = 1045 \text{ kilog.}$$

Ce poids de 1045 kilogrammes par mètre courant de ferme se décompose comme il suit :

Accessoires, contreventements, rivures.	$1045 \times \frac{0.40}{1.40}$	$= 298^k.57$
Reste pour les trois parties principales		$746^k.43$
Total égal.		$1045^k.00$

Tables horizontales.	$746.43 \times \frac{2250}{3143}$	$= 534.4$
Treillis.	$746.43 \times \frac{750}{3143}$	$= 178.1$
Parties portant sur les culées.	$746.43 \times \frac{143}{3143}$	$= 33.9$
Total.		746.4

Et pour les poids totaux des diverses parties de la poutre :

		Kilogr.
Tables.	534.4 × 60	= 32064
Treillis.	178.1 × 60	= 10686
Parties portant sur les appuis.	33.9 × 60	= 2034
Accessoires, contreventements, rivures. . .	298.57 × 60	= 17916
Poids total de la poutre.	1045 × 60	= 62700

§ 2.

Comparaison de divers projets de ponts destinés à franchir le même débouché.

La formule qu'on vient d'employer ne s'applique rigoureusement qu'aux poutres d'une seule travée. On peut néanmoins s'en servir encore pour déterminer approximativement le poids propre minimum d'une poutre à plusieurs travées continues, dès que l'on connaît les portées. La continuité entraîne une certaine économie sur le poids total de la partie métallique d'un pont. La formule, où l'on suppose les travées indépendantes, conduit donc à une limite supérieure du poids propre cherché. On pourrait sans doute trouver des formules analogues donnant avec plus de rigueur le poids propre d'une poutre continue; mais elles seraient trop complexes pour être d'un usage commode.

Dans les calculs de l'établissement d'une poutre posée sur plus de deux appuis, on pourra donc, au lieu d'adopter un poids propre arbitrairement choisi, comme on le fait généralement, demander à la formule une valeur approximative du poids propre, comme s'il s'agissait d'une travée libre de même ouverture. Cette formule est surtout utile pour comparer les divers projets qu'on peut dresser pour un même passage.

Par exemple, un chemin de fer à deux voies doit franchir une rivière de 200 mètres de débouché total. On peut opérer ce passage soit avec cinq travées de 40 mètres, soit avec quatre de 50, soit avec trois de 66.66. On demande quelle est, de ces trois combinaisons, la plus économique. On

suppose connu le prix f du kilogramme de fer, pose et autres frais compris, et le prix F de construction d'une pile en rivière.

On calculera d'abord le poids par mètre courant des ponts à deux voies de 40 mètres, de 50 mètres et de 66^{m}.66 de portée; la surcharge à admettre est de 8000 kilogrammes, en confondant ensemble toutes les fermes.

La poutre de 40 mètres pourra avoir 5 mètres de hauteur, ce qui fait un surbaissement d'un huitième; la poutre de 50 mètres, avec la même hauteur de 5 mètres, sera surbaissée au dixième; enfin la poutre de 66^{m}.66 aura une hauteur de 5^{m},50, le douzième environ de sa portée.

Nous ferons K = 0.40,

$$R = 6000000,$$
$$R' = 5000000,$$
$$R'' = 3500000.$$

On trouvera les résultats suivants :

	Poids par mètre courant.	Poids total pour 200 mètres.
Portées de 40 mètres.	1744 kil.	348800 kil.
— de 50 mètres.	2712	542400
— de 66^{m}.66 mètres. . .	4968	993600

Le prix de l'ouvrage, réduit à la partie métallique et aux piles en rivières, qui seules varient d'une solution à l'autre, sera donc :

Dans le premier projet. . . .	$348800 \times f + 4F$
Dans le second.	$542400 \times f + 3F$
Pans le troisième.	$993600 \times f + 2F$

Soit, par exemple, $f = 0^{f}.80$ et F = 40 000 fr.

On trouvera :

Pour le premier projet une dépense de. .	439040 fr.
Pour le second —	553920
Pour le troisième —	87488o.

Le projet qui admet cinq travées est donc le plus économique des trois.

Le résultat de la comparaison pourrait être différent, si la difficulté des fondations en rivière était très-grande, ou si le prix F était très-élevé, le prix f du kilogramme de fer étant au contraire très-bas.

Si l'on adopte le projet du pont à cinq travées, on devra donner aux travées de rive une longueur égale aux $\frac{4}{5}$ des travées centrales, ce qui conduit à la division suivante :

2 travées de rive à $34^{m}.79$.	$69^{m}.58$
3 travées centrales à 43.47. . . .	$130^{m}.41$
Total.	$200^{m}.00$

C'est à cette division en cinq travées qu'on appliquera le calcul des moments fléchissants et de la distribution des tôles, en partant d'une surcharge de 4 000 kilog. par mètre courant de ferme, si l'on en suppose deux, et d'un poids propre de $\frac{1744}{2}$, ou de 872 kilogrammes, soit, en nombre rond, de 900 kilog.

CHAPITRE III.

CALCULS DIVERS.

---

§ 1er.

Calcul de l'établissement d'un pont à treillis pour une travée unique.

Les données immédiates sont :

La portée l;

La hauteur H, généralement comprise entre $\frac{l}{8}$ et $\frac{l}{12}$;

La surcharge p'' *par mètre courant de poutre*, y compris le poids propre de la voie et du tablier.

Elle est égale à la surcharge par mètre courant de simple voie si les deux voies sont portées par deux fermes seulement, à la moitié si elles le sont par quatre. Enfin, pour les ponts à trois fermes, on peut supposer que p'' se partage approximativement entre les trois fermes de la manière suivante :

Pour chaque travée de rive, les $\frac{3}{8}$ de la surcharge par mètre courant de simple voie;

Pour la travée commune aux deux tabliers, les $\frac{5}{4}$ de la même surcharge.

Cette répartition suppose que les pièces de pont, continues d'un tablier à l'autre, sont chargées uniformément.

On prend arbitrairement la longueur b de l'appui sur la culée; on prend aussi arbitrairement le nombre $2n$ de barres de treillis à la rencontre d'une même verticale. Ce nombre comprend n barres montantes et n barres descendantes. La suite du calcul fait voir si le nombre adopté conduit ou non à des sections admissibles pour les barres.

Les limites des efforts sont fixées comme plus haut :

6	kilogrammes par	millimètre carré	dans les bandes,
5	*id.*	*id.*	dans le treillis,
et 3 $\frac{1}{2}$	*id.*	*id.*	sur les appuis.

On calculera p' au moyen de la formule connue, en confondant H' avec H, et en donnant à K une valeur de 0.40.

Les calculs à faire ensuite se réduisent à remplir le tableau suivant. Nous y avons inscrit les chiffres correspondants à la poutre de 60 mètres de portée, dont le poids propre a été déterminé tout à l'heure.

Portée.	(1)	l	mètres. 60.00
Surcharge par mètre courant de ferme, y compris la surcharge permanente.	(2)	p''	kilogr. 2 000
Poids propre par mètre courant de ferme.	(3)	p'	kilogr. 1 015
Poids total par mètre courant de ferme.	(4)	$p=p'+p''$	kilogr. 3 045
Réaction verticale de la culée, ou maximum de l'effort tranchant.	(5)	$A=\frac{1}{2}pl$	kilogr. 91 450
Moment fléchissant au centre de la portée	(6)	$M=\frac{1}{4}Al$	kil. mèt. 1 370 250
Hauteur de la poutre	(7)	H	mètres. 5.00
Section minimum à donner à chaque bande horizontale au centre de la portée pour un effort de 6 kilogrammes.	(8)	$\omega=\frac{M}{6H}$	mil. quar. 45 675
Nombre de barres du treillis à la rencontre d'une même verticale.	(9)	$2n$	» 10
Tension ou compression dans une barre de treillis (inclinée à 45°) à l'aplomb de la culée.	(10)	$\varsigma=A\frac{\sqrt{2}}{2n}$	kilogr. 12 880
Section minimum a donner aux barres du treillis, à l'aplomb de la culée, effort : 5 kilog.	(11)	$\alpha=\frac{\varsigma}{5}$	mill qu. 2 576
Section minimum au centre de la portée.	(12)	$\alpha'=\frac{\alpha}{4}$	mill. qu. 644
Section horizontale à donner aux parties qui portent sur la culée, pression : 3 1/2 kilogr.	(13)	$S=\frac{2}{7}A$	mill. qu. 26 100
Sect. tot. par mèt. cour. de cornières à donner aux rivets qui doivent joindre les bandes au treillis. Effort, 5 kil., cisaillement simple.	(14)	$\beta=\frac{A}{5H}$	mill. qu. 3 654
Longueur d'appui sur une culée.	(15)	b	mètres. 0.75
Dilatation totale de la poutre pour une variation de température de 50° centigr.	(16)	$(l+2b)\times 0,6$	millimètres 36.9

Composition des sections.

Bandes horizontales, au centre de la portée.

Nous avons trouvé une section de 45675 millimètres quarrés, colonne (8); on pourra la composer comme il suit :

	millim. qu.
4 tôles de 1000 millim. de largeur sur 10 d'épaisseur. . .	40000
2 cornières de 100 millim. de branche, et de 16 millim. d'épaisseur moyenne..	5888
Section totale.	45888

On obtient ainsi une section qui excède légèrement le minimum cherché. Des quatre tôles qui forment la section, une seule se prolonge dans toute l'étendue de la poutre; la seconde, la troisième, la quatrième seront interrompues de manière à suivre sur l'épure le contour de la parabole des moments. On prolonge d'ailleurs chaque feuille nouvelle en dehors de ce contour de la quantité nécessaire pour couvrir et compenser le joint des feuilles précédemment posées. Tous les autres joints doivent être compensés par des couvre-joints spéciaux.

Les trous de rivets affaiblissant les sections soumises à l'extension, on compense quelquefois cet affaiblissement en donnant aux tôles de ces sections un léger surcroît d'épaisseur; ici, l'on prendrait par exemple, des tôles de 11 millimètres pour former la semelle inférieure de la poutre.

Treillis. — Les limites des sections des barres du treillis sont, colonnes (11) et (12):

A l'aplomb de la culée.	2576 millim. qu.
Au milieu de la portée.	644

De ces deux limites, la plus petite n'est pas admissible, et l'on ne s'inquiétera pas de la serrer de près. Il est convenable d'ailleurs d'arrondir par excès la première. Nous prendrons en définitive une section de

$$200^{mm} \times 15^{mm} = 3000, \text{ à l'aplomb de la culée,}$$

et de

$$200^{mm} \times 7\tfrac{1}{2} = 1500 \text{ au centre de la portée.}$$

Il résultera de ces augmentations de sections un accroissement notable du poids calculé du treillis.

Ces barres seront partagées en un certain nombre de groupes, 4 par exemple, comprenant 4 grandeurs de sections.

On pourrait faire varier les deux dimensions des barres, épaisseur et largeur; l'intervalle des barres d'axe en axe restant le même, le centre de la portée serait plus évidé que les extrémités.

Les cinq barres montantes et les cinq barres descendantes sont réparties à distances égales entre les deux cornières des tables. La distance verticale d'axe en axe de deux barres consécutives d'un même système s'obtiendra donc en divisant par 5 la hauteur comprise entre les deux bandes, et comme le treillis est à 45°, le quotient indiquera aussi leur distance horizontale; divisant 60 mètres par cette distance, on aura le nombre de barres *complètes* d'un même système; les barres plus courtes qui se logent dans les angles du treillis se réunissent deux par deux pour former une barre complète.

La plus grande section est de.	200×15
La plus petite.	$200 \times 7\frac{1}{2}$
Les deux sections intermédiaires auront, par exemple, l'une.	200×12
L'autre.	200×10

Parties portant sur les appuis.

Sur la culée, on doit trouver une section minimum de 26100 mill. quarrés, colonne (13). La longueur de la poutre sur son appui étant 750 millimètres, colonne (15), on pourra y placer :

	millim. qu.
2 tôles de 730×10 en prolongement de la paroi verticale de la poutre, fournissant une section de.	14600
2 tôles transversales de 300×10.	6000
4 cornières de $\frac{80 \times 80}{10}$, aux angles des tôles portant sur les appuis.	6560
Total.	27160

Les tables numériques que l'on trouvera à la suite de ce chapitre faciliteront les calculs de l'établissement du pont et les métrés des ouvrages.

Par exemple, on a trouvé dans le tableau, colonne (14), qu'il fallait 3654 millimètres quarrés pour la section totale des rivets, par mètre courant de cornière, à la jonction du treillis aux bandes horizontales; si l'on prend des rivets de 20 millimètres, la table 6 fait voir, par une simple addition, que 12 rivets donnent une section totale de 3768 millimètres quarrés, supérieure à celle dont on a besoin. On devra donc mettre au moins 12 rivets par mètre courant de cornières. A la jonction d'une barre voisine de la culée avec les cornières, il faut une section totale de 2576 millimètres quarrés de rivets travaillant au simple cisaillement, colonne (11); cette section est celle de la barre elle-même. Elle correspond à 7 rivets de 22 millimètres, et si les rivets travaillent au double cisaillement, on pourra réduire ce nombre à moitié et ne prendre que 3 à 4 rivets.

§ 2.

Pièces de ponts et longerons sous rails.

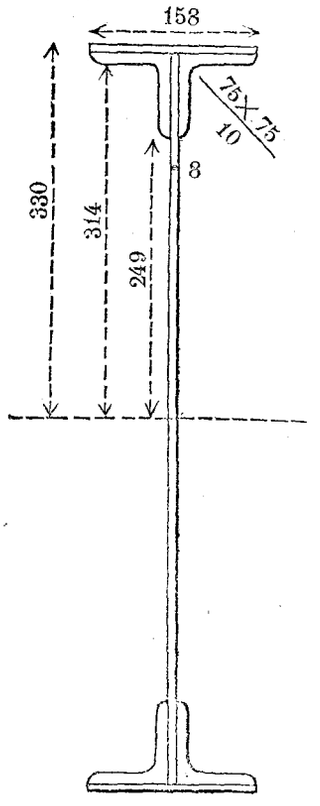
L'intervalle de deux pièces de pont consécutives est en général fixé à $2^{m}.50$. La plus grande charge qu'elles supportent a lieu au moment du passage d'un essieu moteur, dont le poids est au maximum de 12 tonnes. On soulagerait peu les pièces de pont en les rapprochant davantage, car il faudrait toujours qu'elles eussent la résistance correspondante à ce poids.

Dans un tablier à une voie, les pièces de pont ont $4^{m}.65$; dans un tablier à deux voies, elles ont 7 mètres et au delà.

Exemple du calcul d'une pièce de pont pour un tablier à une voie :

Portée totale, $4^{m}.654$,
Distance du rail à l'extrémité de la pièce, $1^{m}.565$.

Composition du profil en travers :



2 tables horizontales de 158 × 6,
1 âme verticale de 648 × 8,
4 cornières de 75 de branche et de 10 d'épaisseur réduite, pesant l'une 11 kilog. le mètre courant.

Moment d'inertie I de la section par rapport à l'horizontale menée dans son plan par son centre de gravité :

$$I = 0.000\,896\,39.$$

Distance de la fibre la plus chargée à la fibre neutre :

$$v = 0^{m}.330.$$

Moment d'élasticité :

$$\frac{RI}{v} = R \times 0.002\,716.$$

Moment fléchissant maximum, sous une pression de 6 tonnes sur chaque rail :

$$6000 \times 1.565 = 9390 \text{ kilog.}$$

$$R = \frac{9390}{0.002\,716} = 3\,460\,000 \text{ kilog. par mètre quarré,}$$

ou

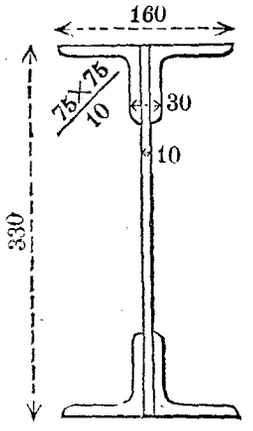
$$3^{k}.46 \text{ par millim. quarré.}$$

Le moment fléchissant maximum s'applique à toute section comprise dans l'intervalle des deux rails.

La distance, $2^{m}.50$, de deux pièces de pont consécutives est trop grande pour que le rail puisse la franchir sans appui ; aussi le fait-on porter sur un longeron jeté d'une pièce de pont à l'autre. Ce longeron soutient la longrine en bois sur laquelle est posé le rail, car le rail ne doit pas reposer directement sur le métal, et l'interposition d'un matelas en bois entre la voie et le tablier métallique est indispensable pour la conservation des assemblages des tôles.

La résistance du longeron se calcule en supposant qu'il est simplement posé sur deux appuis distants de $2^{m}.50$, et qu'il porte un poids de 6 tonnes concentré au milieu de sa longueur.

Voici un exemple de ce calcul :



Portée $2^{m}.50$.

Composition du profil en travers :

1 âme verticale de 330×10.

4 cornières de $\frac{75 \times 75}{10}$ pesant 11 kil. le mètre.

Ce sont les branches horizontales des cornières qui constituent ici les semelles du double T. Le longeron est posé de manière que la semelle supérieure arrase le niveau du dessus de la pièce de pont.

Moment d'inertie I de la section I = 0.000 14564.

Moment d'élasticité $\frac{RI}{v} = R \times 0.000\,883$.

Moment fléchissant au milieu $3000 \times \frac{2.5}{2} = 3750$ kil.

R = 4 270 000 kilog. par mètre quarré ou $4^{k}.27$ par millim. quar.

Une plaque de tôle rivée à plat sur les cornières supérieures de deux longerons consécutifs, et sur la table de la pièce de pont qui les sépare, établit une continuité incomplète entre les deux longerons, leur donne de la rigidité, et agissant à la manière d'un encastrement, soulage le centre des portées.

Les charges, $3^{kil}.46$ et $4^{kil}.27$, que nous venons de trouver, peuvent paraître faibles. Il n'y a cependant pas là d'exagération de prudence. Ces charges sont calculées en admettant que le poids d'un essieu moteur se partage par moitié entre les deux rails : or les inégalités de la voie et les oscillations de la locomotive détruisent à chaque instant cette égalité, et reportent d'un rail à l'autre un excès de pression inconnu. Les charges réelles peuvent donc être

supérieures aux charges calculées. On se tient dans le projet au-dessous des limites de résistance, pour être sûr que ces limites ne seront pas effectivement dépassées. C'est pour une raison semblable que l'on grossit les essieux des wagons à partir du milieu jusqu'à l'endroit du calage des roues.

§ 3.

Contreventement et entretoisement.

Les parois verticales des poutres métalliques sont roidies au moyen de fers à T verticaux, ou simplement de cornières, que l'on rive à plat sur chacune de leurs faces. On augmente la rigidité des poutres en garde-corps en placant transversalement, de distance en distance, des plaques de tôle formant goussets entre l'âme des poutres et les pièces de ponts. La discontinuité des goussets laisse des garages libres aux agents de la voie pris sur le pont par le passage d'un train.

Il faut aussi prévenir les flexions des fermes dans le sens horizontal; à ce genre de déformation les pièces de pont n'opposent, quand le pont a une grande longueur, qu'une résistance à peu près nulle. On donne à la construction la rigidité nécessaire en reliant les deux fermes l'une à l'autre par des pièces diagonales; en d'autres termes, on forme un treillis horizontal à grandes mailles qui s'oppose aux déviations latérales du système formé par les deux poutres.

Lorsque la voie est en bas des fermes, ce contreventement s'obtient facilement en rivant à plat sur les pièces de pont, d'une ferme à l'autre, des bandes diagonales, qui, par suite de leur voisinage du plan de la voie, ont une grande efficacité pour détruire la tendance aux déplacements latéraux qui résulte du mouvement de lacet des véhicules.

Les efforts transversaux provenant de la circulation des trains sont trop peu connus pour que les dimensions des pièces destinées à les équilibrer puissent être obtenues par le calcul. L'observation et la comparaison des ouvrages exécutés sont en pareil cas les seuls guides à suivre.

RENSEIGNEMENTS DIVERS.

1. *Poids spécifique, élasticité, rupture.*

MATIÈRES.	POIDS du mètre cube.	COEFFICIENT d'élasticité à l'extension.	COEFFICIENT d'élasticité à la compression.	LIMITE d'élasticité à l'extension.	LIMITE d'élasticité à la compression.	CHARGES de rupture à l'extension.	CHARGES de rupture à la compression.	Observations.
	kilogr.	Kilogrammes par mètre quarré. — Multiplier les nombres qui suivent par 10^8.		Kilogrammes par millimètre quarré.				
FER. Fil de fer	7800	160 à 220		15	15	70	25	Hodgkinson.
FER. Fer en barres						40		
FER. Tôle						38		
FONTE	7200	60 à 120	80	6	10	9 à 14	63	
BOIS Chêne sec	800	9 à 12		2	2	6 à 9	4 à 4 1/2	
BOIS Sapin sec	530					4		

2. *Limite pratique de la charge par centimètre quarré que l'on peut faire supporter à différents matériaux.*

Acier première qualité	1600 kilogr. (jusqu'à 2200)	
— qualité moyenne	1250^k	On réduit ces limites à la moitié ou aux deux tiers quand les matériaux doivent supporter un effort permanent.
Fer forgé	de 660 à 800	
Fer laminé, tôle	de 500 à 750	
Fonte à la compression	de 600 à 750	
— à l'extension	de 200 à 300	
Bois de chêne ou de sapin	de 60 à 80	

3. *Pièces pressées par leurs abouts.*

1° Bois (chêne ou sapin), d'après Rondelet.

Rapport de la longueur à la moindre dimension transversale.	1	12	24	36	48	60	72
Charge qui produit l'écrasement en kilogrammes par centimètre quarré.	420	350	210	140	70	35	17.5
Limite pratique de la charge (le 7^{me} de la charge de rupture).	60	50	30	20	10	5	2.5

Formule empirique de Hodgkinson.

P, charge en kilogrammes qui produit l'écrasement d'une pièce de bois de chêne ayant pour longueur l décimètres, et pour section un quarré de c centimètres de côté :

$$P = A\left(\frac{c^2}{l}\right)^2.$$

Le nombre A varie de 2300 à 2600. La limite pratique de la charge est égale au septième de la valeur de P fournie par cette formule.

2° Colonnes cylindriques en fonte ou en fer.

Les colonnes cylindriques en métal sont pleines ou creuses ; quand elles sont creuses, on donne en général au métal une épaisseur égale au dixième du diamètre extérieur, sans toutefois descendre au-dessous d'une certaine limite, 12 millimètres, par exemple.

Formule empirique de Hodgkinson, pour les colonnes en fonte, à base plate :

P, charge de rupture en kilogr. .
d, diamètre extérieur en centim.
d', diamètre intérieur en centim.
l, hauteur de la colonne en déci.

$$P = 10200\,\frac{d^{3,6} - d'^{3,6}}{l^{1,7}}$$

Formules empiriques de M. Love, pour les colonnes pleines, en fonte ou en fer, à base plate :

P, charge de rupture en kilogr. . }
D, diamètre en centimètres. . . . }
L, hauteur en centimètres . . . . }

Fonte $P = \frac{1250\,D^2}{1.85\,D^2 + 0.00043\,L^2}$.

Fer $P = \frac{600\,D^4}{1.97\,D^2 + 0{,}00064\,L^2}$.

Quand le rapport de la hauteur au diamètre excède le nombre 30, les colonnes pleines en fer supportent des charges plus grandes que les colonnes pleines en fonte.

4. *Table des largeurs des feuilles de tôle, correspondantes à une section et à une épaisseur données.*

SECTION donnée en millim. quarrés.	POIDS correspondant en kilogr. par metre courant.	LARGEUR DES FEUILLES POUR UNE ÉPAISSEUR DE						
		6 millim.	8 millim.	10 millim.	12 millim.	15 millim.	20 millim.	25 millim.
		mm.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.
100	0.78	16.67	12.50	10	8.33	6.67	5	4
200	1.56	33.34	25.00	20	16.66	13.34	10	8
300	2.34	50.01	37.50	30	24.99	20.01	15	12
400	3 12	66.68	50.00	40	33.32	26.68	20	16
500	3.90	83.35	62.50	50	41.65	33.35	25	20
600	4.68	100.02	75.00	60	49.98	40.02	30	24
700	5.46	116.69	87.50	70	58.31	46.69	35	28
800	6.24	133.36	100.00	80	66.64	53.36	40	32
900	7.02	150.03	112.50	90	74.97	60.03	45	36

5. *Table des dimensions et des sections de cornières de divers modèles.*

LONGUEUR de branche *a*.	ÉPAISSEUR moyenne *c*.	ÉPAISSEUR mesurée suivant la bissectrice de l'angle.	AIRE en millimètres quarrés.	POIDS du mètre courant.
mm.	mm.	mm.	mm. quar.	kilogr.
55	7	15	770	6.00
60	8	17	930	7.25
65	9	19	1 120	8.74
70	10	21	1 330	10.37
75	10 1/2	22	1480	11.54
80	11	23	1 640	12.79
85	12	25	1 890	14.74
90	13	27	2 160	16.85
95	14	29	2 450	19.11
100	15	31	2 750	21.45

OBSERVATIONS.

Cornières à branches égales.

a, longueur de branche, prise extérieurement.
c, épaisseur *réduite*.

La cornière se représente par la notation $\frac{a \times a}{c}$.

On a approximativement pour la section :

$$(2a - c)\, c.$$

Si *a* et *c* désignent des millimètres, $(2a - c)\, c \times 7{,}8$ est en grammes le poids approximatif du mètre courant de cornière.

Cornières à branches inégales.

a, *b*, longueurs des branches en millimètres.
c, épaisseur réduite.

$\frac{a \times b}{c}$.

On a approximativement pour la section : $(a + b - c) \times c$ millimètres quarrés, et pour le poids, $(a + b - c) \times c \times 7.8$ grammes par mètre courant.

6. *Table du nombre des rivets nécessaires pour former une section déterminée.*

NOMBRE de rivets.	SECTION TOTALE AVEC RIVETS DE			
	18 millimètres.	20 millimètres.	22 millimètres.	25 millimètres.
	mm. quarrés.	mm. quarrés.	mm. quarrés.	mm. quarrés.
1	254	314	380	491
2	508	628	760	982
3	762	942	1 140	1 473
4	1 016	1 256	1 520	1 964
5	1 270	1 570	1900	2 455
6	1 524	1 884	2 280	2 946
7	1 778	2 198	2 660	3 437
8	2 032	2 512	3 040	3 928
9	2 286	2 826	3 420	4 419
Maximum de l'épaisseur à river.	69 millimètres.	78 millimètres.	87 millimètres.	96 millimètres.
Poids de 100 têtes	kil. 4.281	kil. 5.866	kil. 7.764	kil. 11.390

LIGNE DE

PONTS MÉTALLIQUES

CAHIER DES CHARGES SPÉCIAL.

CHAPITRE I.

DISPOSITIONS GÉNÉRALES.

ART. 1er. — *Objet du cahier des charges.*

Le présent cahier des charges a pour objet spécial la construction de ponts en fer.

ART. 2. — *Établissement des chantiers d'assemblage.*

L'entrepreneur disposera des emplacements nécessaires et suffisants pour le dépôt des approvisionnements et l'établissement des chantiers d'assemblage.

Les emplacements devront être dans le voisinage immédiat d'une des extrémités du pont. L'entrepreneur fera à ses frais les terrassements nécessaires pour niveler et dresser parfaitement ces emplacements.

La Compagnie donnera des repères fixes de hauteur et d'alignement : ces repères serviront à l'entrepreneur pour déterminer l'emplacement et la hauteur des différentes parties de la construction.

Ces repères seront conservés jusqu'à la réception du pont par la Compagnie.

ART. 3. — *Études des projets.*

L'entrepreneur présentera à la Compagnie des dessins d'ensemble et de détails des ouvrages, accompagnés des épures et des notes explicatives des calculs qui auront servi à établir les principales dimensions.

Les calculs des fermes et tabliers seront établis d'après les conditions suivantes :

1° Quant à la charge par mètre courant de simple voie, elle sera supposée :

De 8000 kilog. pour les ouvertures de moins de 6 mètres de portée;

De 7000 kilog. pour les ouvertures de 6 à 10 mètres;

De 6000 kilog. pour les ouvertures de 10 à 15 mètres;

De 5000 kilog. gour les ouvertures de 15 à 20 mètres;

De 4500 kilog. pour les ouvertures de 20 à 30 mètres;

De 4000 kilog. pour les ouvertures au-dessus de 30 mètres;

2° Quant aux limites de la résistance du fer, elles seront fixées par millimètre quarré, savoir :

(*a*) Dans les tables horizontales, à 6 kilog. pour les ponts de plus de 8 mètres d'ouverture;

A 5 kilog. pour les ponts au-dessous de 8 mètres d'ouverture.

(*b*) Dans les barres du treillis à 5 kilog.

(*c*) Pour les rivets cisaillés et pour les parties soumises à un effort tranchant, à 5 kilog.

(*d*) Pour les parties résistant à l'écrasement sur les appuis, à 3 kilog. 1/2.

Un ordre de service spécial déterminera pour chacun des ponts la profondeur d'enfoncement à donner aux piles fondées par les procédés pneumatiques, et le maximum de pression auquel le terrain sous ces piles pourra être soumis.

L'entrepreneur ne devra commencer l'exécution qu'après que la Compagnie lui aura remis les dessins approuvés.

Tous les ouvrages seront exécutés conformément aux dessins approuvés comme ci-dessus.

Dans le cas où l'entrepreneur jugerait à propos d'apporter quelques modifications dans les dispositions approuvées, il serait tenu de les soumettre en temps utile à la Compagnie sous peine de voir rejeter les pièces modifiées.

L'approbation ci-dessus n'atténuera en rien la responsabilité de l'entrepreneur qui restera pleine et entière.

La Compagnie pourra apporter en cours d'exécution toutes les modifications qu'elle jugera convenables aux tracés, largeur ou débouché de tous les ponts. Seulement s'il y avait lieu à supplément de prix, indemnité ou prolongation des délais, il devra en être fait au préalable estimation. Les réclamations faites après exécution ne seront pas accueillies.

CHAPITRE II.

QUALITÉS ET PROVENANCE DES MATÉRIAUX.

ART. 4. — *Qualités de la fonte.*

La fonte devra être de la meilleure qualité; elle présentera dans sa cassure un grain gris, serré et régulier, et avec arrachements. Elle sera exempte de gerçures, gravelures, soufflures, gouttes froides et autres défauts susceptibles d'altérer sa résistance et la netteté des formes des pièces.

Elle devra être à la fois douce et tenace, facile à entamer au burin et à la lime, susceptible d'être refoulée au marteau; elle devra prendre peu de retrait au moulage, et, pour la résistance comme pour toutes les autres qualités, être égale aux meilleures fontes de moulage anglaises.

Elle ne devra pas rompre par écrasement sous une charge de 30 kilog. par millimètre quarré de section, et devra pouvoir, sans aucune altération, résister à une charge de 4 kilog., également par millimètre quarré de section.

A la flexion, la fonte devra résister à un effort de 25 kilog. par millimètre quarré : c'est-à-dire que des barreaux quarrés de 25 millimètres de côté, reposant sur des appuis distants de 50 centimètres, et chargés en leur milieu, ne devront pas rompre sous une charge de 500 kilog.

La Compagnie aura le droit de faire par pression ou par traction directe, ou par flexion, avec poids mort ou par choc, toutes les épreuves qu'elle jugera convenables sur des barreaux ou pièces fondues à chaque coulée, de manière à apprécier à tous les points de vue la qualité des fontes.

ART. 5. — *Qualités des fers.*

Indications générales. — Tous les fers seront corroyés, doux, non cassants, malléables à chaud et à froid; leur cassure présentera une texture à nerf, ou un grain fin et homogène.

Ils seront parfaitement laminés, sans pailles, criques ou autres défauts; leurs surfaces seront nettes et sans trace d'incrustation d'oxyde ou de scories.

Tous ces fers devront pouvoir supporter à la traction une charge de 30 kilog. par millimètre quarré sans se rompre, et de 15 kilog. par millimètre quarré sans éprouver la moindre altération d'élasticité.

Tôles. — Les tôles devront être d'une qualité au moins égale aux tôles employées dans la fabrication des chaudières de machines à vapeur; celles dont la qualité serait inférieure seront refusées. Elles seront parfaitement laminées et très-bien soudées, sans pailles, stries, gerçures ou manque de matière. Les tôles aigres, à nerf feuillé, qui se fendraient ou s'ouvriraient sous le poinçon, ou qui se déchireraient quand on voudrait les courber, infléchir ou cisailler, seront également refusées.

Dans le travail à la machine à percer, à la machine à raboter ou à la cisaille, la tôle devra présenter dans sa tranche une coupe grasse.

Fers spéciaux. — Les fers cornières, fers à T ou fers de toute autre forme employés dans la construction des ponts seront d'une excellente qualité, susceptibles de se plier à froid comme à chaud suivant les formes exigées par la construction, d'être facilement travaillés à la forge, au poinçon et à la machine à percer, le tout sans gerçures ni altération.

Ils seront laminés parfaitement droits et réguliers et seront au besoin dressés sur des tas en fonte ayant en creux la forme à donner aux fers.

Garde-corps. — Les fers pour garde-corps et mains courantes pourront être de seconde qualité, non cassants à froid. Ces fers seront parfaitement dressés après le laminage.

Rivets. — Les rivets seront en fer de même qualité que le fer employé pour les rivets des chaudières; le fer en sera ductile et tenace, et présentera, comme nerf, finesse et propreté, tous les caractères du fer le plus résistant.

Les rivets doivent être obtenus en un seul coup de la machine à [illegible] le fer ait été surchauffé ou brûlé.

Les formes et les dimensions des rivets seront exactement conformes aux dessins qui seront remis à l'entrepreneur.

Les têtes seront bien centrées et d'équerre à la tige; celle-ci sera droite et d'un diamètre uniforme avec une tolérance de 1 millimètre en plus sous la tête.

En conséquence les matrices et étampes servant à la fabrication et à la pose des rivets seront renouvelées aussi souvent qu'il sera nécessaire.

Les fers pour rivets seront capables de supporter des épreuves de deux espèces :

1° Pour s'assurer de leur résistance transversale, on prendra des bouts de 20 centimètres de longueur et on les enfoncera jusqu'à moitié de leur longueur dans des blocs de bois de chêne préalablement percés pour les recevoir.

On les frappera latéralement sur la partie supérieure de manière à les infléchir d'un angle de 45°. Les fers redressés ensuite à froid, ne devront présenter ni cassures, ni criques, ni aucune détérioration.

2° Pour constater la résistance à la rivure, on rivera à chaud, et le fer devra s'étaler bien uniformément sans se fendiller et sans qu'aucune parcelle s'en détache. La rivure faite, les têtes ne devront pas se détacher, quels que soient les chocs auxquels on soumettra les tôles autour des rivets.

Boulons. — Les boulons seront en fer de première qualité, non cassant à froid. Les écrous pourront être en fer laminé; dans ce cas ils seront fabriqués par enroulement et soudure. Si l'on veut les enlever dans la masse, ils seront en fer supérieur. On n'admettra pas les écrous qui seraient faits à froid à l'emporte-pièce dans des plates-bandes laminées.

Les fers pour boulons devront pouvoir supporter deux séries d'épreuves :

1° On éprouvera la résistance transversale des fers comme il a été dit plus haut pour le fer des rivets.

2° Dans la seconde épreuve qui sera faite sur les boulons fabriqués, on courbera le boulon à froid sur une enclume jusqu'à rupture, pour s'assurer que le fer n'est pas cassant et qu'il présente une contexture convenable.

ART. 6. — *Qualités du plomb.*

Le plomb à employer pour scellement pourra être vieux ; il sera bien épuré, non graveleux ni terreux.

Le plomb laminé sera de la meilleure qualité, bien épuré, uni et doux, sans cassures ou gerçures,

ART. 7. — *Épreuves.*

L'ingénieur de la Compagnie indiquera en temps utile les détails des épreuves auxquelles les matériaux devront être soumis pour reconnaître s'ils satisfont aux conditions prescrites.

Ces épreuves seront faites par les soins de la Compagnie aux frais de l'entrepreneur, qui devra fournir les appareils nécessaires et les pièces spécialement préparées pour les essais, le tout à ses frais et conformément aux instructions qui lui seront données.

ART. 8. — *Provenance.*

Désignation de la provenance. — L'entrepreneur sera tenu de faire agréer par la Compagnie le lieu de provenance des matières: fontes, fers, tôles, etc., et après avoir obtenu l'agrément de la Compagnie, imposera les mêmes lieux de provenance à ses fournisseurs.

Droit de surveillance. — L'entrepreneur devra faire connaître à ses fournisseurs de fers et fontes les clauses stipulées dans le présent cahier des charges, relativement à la qualité des matières, et réserver pour un agent de la Compagnie les droits définis au présent cahier des charges.

Communication des traités. — Il donnera à la Compagnie copie des traités par lesquels il aura fait aux fabricants les commandes de matières, en se bornant à reproduire les articles relatifs aux qualités, aux dimensions, à la bonne exécution et aux délais de livraison des objets commandés.

CHAPITRE III.

EXÉCUTION DES OUVRAGES.

ART. 9. — *Ajustage.*

Tôles et fers. — L'ajustage sera fait de la manière suivante:

Les tôles seront parfaitement dressées et coupées carrément.

Les tranches des côtés découverts des tôles et couvre-joints seront dressées de manière à présenter des lignes régulières.

Ces tranches seront franches sur toute l'épaisseur et ne devront présenter ni déchirure ni manque de matière.

Les tranches de toutes les pièces, tôles, fers, cornières, etc., dans les parties où les jonctions bout à bout devront avoir lieu, seront dressées à la machine à raboter de manière à assurer sur toute la surface du joint un contact parfait. On devra adoucir à la lime les arêtes des feuilles de tôles après l'affranchissement par cisailles, afin qu'aucune irrégularité n'empêche la parfaite juxtaposition des couvre-joints.

Des axes mathématiques, déterminés chacun par des coups de pointe, seront établis au milieu de chaque feuille de tôle, et serviront à repérer exactement les lignes de rabotage et les alignements des trous. Les cornières, fers à T et autres seront pliés sur des calibres en fonte ; pour éviter de brûler ces fers, on devra les chauffer, autant que possible, au four et non à la forge.

Fonte. — Les tambours ou parties des tambours circulaires formant les tubes des piles pneumatiques à établir en rivière, seront exactement rabotés ou tournés sur toutes les faces de manière à assurer un contact parfait sur toute la surface, principalement dans les parties des colonnes qui ne doivent pas être remplies de béton ou de maçonnerie.

Les faces des deux rebords, recevant, l'un la tête, l'autre l'écrou d'un même boulon, présenteront des plans exactement parallèles.

Les différentes parties d'un tube étant assemblées devront former une surface cylindrique parfaitement régulière et unie, les joints devront être aussi étanches que possible et présenter des lignes nettes, fines, sans épaufrures ni irrégularités.

Boulons. — Les boulons seront fabriqués avec le plus grand soin et parfaitement calibrés.

Les têtes seront refoulées dans la masse et non rapportées ; dans les écrous faits par enroulement, la soudure, qui devra toujours être faite à cœur, aura une longueur au moins égale à deux fois l'épaisseur de l'anneau.

Le filetage des boulons et le taraudage des écrous devront être nets, soignés et bien uniformes. Les boulons dont le filet serait égrené seront refusés. Les pas de vis seront faits au moyen d'étalons neufs ; ils seront conformes aux modèles agréés par la Compagnie et déterminés pour chaque diamètre par l'ingénieur. Les boulons servant à l'assemblage des métaux entre eux seront tournés et rendus exactement cylindriques sur toute leur étendue. Les têtes et les écrous seront à six pans. Les boulons servant à assembler les charpentes sur les pièces en fer ou en fonte des tabliers ne seront pas tournés ; les têtes seront carrées et les

ecrous à six pans. Les boulons de charpente proprement dits, s'il y a lieu d'en employer, auront la tête et l'écrou carrés et seront munis de rondelles. Les rondelles seront nettement fabriquées, parfaitement unies, planes et sans bavures.

Garde-corps. — Les fers pour garde-corps seront parfaitement dressés et auront exactement les formes prescrites.

Les divers assemblages seront faits avec le plus grand soin et aussi solidement que possible.

Les garde-corps une fois posés devront être très-rigides.

Entretoises. — Les assemblages des entretoises et des contreventements avec les poutres, ne devront rien laisser à désirer comme exactitude et solidité.

Scellements. — Tous les scellements, soit des parties en fonte sur les maçonneries, soit des extrémités des garde-corps dans les dés ou bahuts en pierre, seront faits au plomb.

Art. 10. — *Perçage.*

Exécution des trous. — Le perçage de toutes les pièces devra être fait d'une manière régulière.

Les fers percés seront complétement ébarbés des deux côtés, de façon qu'ils puissent s'appliquer parfaitement les uns sur les autres.

Le perçage des tôles-cornières, fers spéciaux, couvre-joints, fontes, et en général de toutes les pièces répétées plusieurs fois dans la construction du pont, sera fait autant que possible mécaniquement; à cet effet le chariot du poinçon sera muni de moyens d'arrêt établissant des distances mathématiques entre les trous.

Tolérances. — La tolérance pour l'irrégularité du perçage d'un trou à l'autre sera au maximum d'un millimètre, et pour la feuille entière de deux millimètres.

Dans le cas où des feuilles seraient percées à la main, il ne sera plus accordé qu'une tolérance d'un millimètre au plus pour les distances extrêmes.

Il est accordé une tolérance de deux millimètres dans l'alignement des trous, c'est-à-dire que leurs centres devront se trouver entre deux parallèles distantes de deux millimètres. Ces lignes devront être exactement parallèles aux tranches rabotées, à moins d'ordre contraire.

Calibre. — Pour vérifier les dimensions des tôles, l'alignement des trous de rivets et leur diamètre, il sera fait, toutes les fois que cela aura été reconnu nécessaire par l'ingénieur de la Compa-

gnie, des calibres ayant exactement la forme des tôles à examiner. Ces calibres porteront des parties cylindriques ayant les dimensions du corps des rivets et glissant à coulisse dans des rainures correspondant parfaitement avec les lignes des trous à percer. Il sera également établi des calibres dans lesquels seront fixés plusieurs boutons ayant la forme d'un corps de rivet. Ces calibres pourront servir à mesurer deux, quatre ou six trous à la fois.

ART. 11. — *Rivure.*

Les rivures près des joints devront être disposées de manière à provoquer le serrage des tôles en contact. Le contact des tranches devra être parfait, sinon la rivure pourra être refusée.

Les cornières, doublures et couvre-joints devront, dans l'intervalle des rivets, être parfaitement appliqués sur les tôles et fers qu'ils recouvrent, même dans les parties où se présenteront des changements d'épaisseur, et ce, de façon à épouser exactement toutes les irrégularités de la superficie. Dans le cas où ce résultat ne serait pas obtenu, les rivures pourront être refusées.

Les trous relatifs à un même rivet dans les tôles et fers superposés devront correspondre exactement d'une pièce à l'autre. Il sera néanmoins accordé une tolérance d'un millimètre au plus d'excentricité, à la condition de faire disparaître cette différence à l'équarrissoir.

Si l'excentricité est plus considérable, et si, en raison de certaines circonstances dont l'ingénieur de la Compagnie sera seul juge, les tôles et fers présentant ce défaut ne sont pas refusés, le constructeur ne pourra mettre le rivet que lorsque l'ingénieur lui aura prescrit la manière dont le trou doit être modifié.

La rivure devra être précédée du serrage des tôles et des fers superposés; elle devra en outre être opérée de manière qu'aucun déversement ne se produise dans le corps du rivet ou dans la tête de la rivure.

Les rivets devront être préparés avec un diamètre plus petit d'un millimètre que celui des trous.

Les rivets seront chauffés au rouge blanc; ils seront appliqués à cette température et travaillés de manière à serrer fortement les fers et tôles à assembler.

Les têtes devront être bien cintrées. La tête obtenue par la rivure sera nourrie à la naissance et ébarbée; elle ne sera ni criquée ni fendue.

Les rivets seront chauffés au four. Les fours seront placés près

des ouvriers, pour éviter le refroidissement dans le transport entre les fours et l'ouvrage.

Le chauffage à la forge ne sera pas admis dans l'atelier de construction. On ne pourra y recourir que pour les travaux partiels isolés, sur les points où les rivets des fours ne pourraient arriver suffisamment chauds.

Outillage.—Les rivures se feront à la bouterolle avec un marteau à devant. Cependant l'emploi de la machine à river est autorisé. Il ne sera autorisé aucune rivure par le petit marteau de chaudronnier, ni aucun écrasement direct des rivets à l'aide du marteau à devant ou avec une chasse plate, à moins qu'il ne soit impossible d'éviter l'emploi de ces instruments. Les rivoirs et la forme de la bouterolle devront être approuvés par l'ingénieur de la Compagnie.

Les marteaux à main pèseront 4 kilogrammes, et les marteaux à frapper par-devant sur la bouterolle, 8 kilogrammes.

Indication générale. — La nature des travaux ci-dessus décrits sera considérée comme étant exclusivement du genre de la construction des machines et exigeant la même rectitude de montage et d'assemblage, et non comme étant du genre des travaux de chaudronnerie.

Art. 12. — *Montage à l'atelier du constructeur.*

Exécution du travail.—La qualité du travail d'assemblage tenant principalement à la précision du contact des fers juxtaposés par la tranche, on exigera l'emploi de serre-joints suffisants pour obtenir ce contact; on prendra toutes les précautions nécessaires pour ne pas les déranger à la rivure.

Le travail à la rivure sur les pièces montées sera suivi de façon à n'entraîner aucun gondolage ou déformation dans l'ensemble des parois, afin que les lignes et surfaces présentent exactement la forme et la continuité définies par les dessins des ouvrages.

Art. 13. — *Montage au lieu de pose.*

L'assemblage et la rivure sur le lieu de pose seront faits par des ouvriers spéciaux habitués à ce genre de travaux. Ces ouvriers seront en nombre suffisant pour la prompte et bonne exécution des travaux; ils devront obéir aux prescriptions de l'ingénieur de la Compagnie, dans l'intérêt de la bonne exécution.

L'ajustage et la pose de toutes les pièces de fer et de fonte devront d'ailleurs être faits avec la plus grande exactitude. L'entre-

preneur sera responsable de tous les vices de la pose, de même qu'il est chargé de tous les détails de l'exécution.

Au moment de ce montage, l'ingénieur de la Compagnie pourra faire une nouvelle vérification des pièces et écarter celles qui seraient défectueuses.

Les travaux d'assemblage et d'ajustage sur place ne pourront être donnés à la tâche.

ART. 14. — *Peinture.*

Les fers et fontes seront peints sur toutes les surfaces extérieures.

Le nombre de couches sera de deux, dont une au minium et l'autre au blanc de céruse, avec mélange d'une autre couleur pour obtenir la nuance prescrite.

Ces deux couches seront appliquées à l'époque et de la façon qui seront prescrites dans les ordres de service communiqués aux entrepreneurs.

Exécution de la peinture.—Les surfaces à peindre seront d'abord parfaitement grattées et nettoyées, de manière à faire disparaître toute trace d'oxydation. On aura soin de mettre les deux couches par un beau temps. Aucune couche ne devra être appliquée avant que la précédente ne soit bien sèche.

Toutes les couleurs seront parfaitement broyées sur marbre, à l'huile de lin rendue siccative par un mélange de 30 grammes de litharge pour un kilogramme d'huile. Elles seront ensuite détrempées avec un mélange de quantités égales d'huile de lin et d'essence de térébenthine.

L'entrepreneur ne pourra employer pour les peintures des matières sophistiquées ou autres que celles qui lui auraient été prescrites.

CHAPITRE IV.

ÉPREUVES DES OUVRAGES, RÉCEPTIONS, GARANTIES.

ART. 16. — *Épreuves, réception provisoire.*

Objet des épreuves.—Les différentes parties du pont seront soumises à des épreuves qui auront pour objet de vérifier la qualité

des matériaux, la bonne exécution du travail, la rigidité et la solidité des assemblages.

Épreuves au chantier d'assemblage. — De nouvelles épreuves pourront être faites au chantier d'assemblage par l'ordre de l'ingénieur de la Compagnie, sur chacune des fournitures destinées au pont.

L'ingénieur de la Compagnie pourra notamment exiger la rupture d'un boulon sur vingt.

Pour les épreuves ayant pour but de constater la rigidité et la solidité des assemblages, on admettra qu'un assemblage avec deux couvre-joints, reliant deux tôles bout à bout, produit une résistance égale à celle de la section de la feuille de tôle, par suite de la pression exercée par une rivure bien faite.

Ces différentes épreuves et expériences seront exécutées aux frais, risques et périls de l'entrepreneur, comme il a été dit ci-dessus.

Épreuve du pont terminé. — Le pont étant terminé, le tablier monté, couvert de ballast et muni de ses rails, sera soumis aux épreuves suivantes :

1° Chaque travée sera chargée sur les deux voies d'un poids uniformément réparti de 4 000 kilogrammes par mètre courant de voie simple, toutes les autres travées du pont étant entièrement libres.

2° Toute la longueur du pont sera chargée en même temps et sur les deux voies d'un poids uniformément réparti de 4 000 kilogrammes par mètre courant de simple voie.

3° On fera passer à petite et à grande vitesse, sur chaque voie séparément, puis sur les deux voies en même temps, des trains composés de locomotives ou de locomotives et de wagons chargés.

Ces épreuves, dont il sera dressé procès-verbal contradictoire, ne devront produire aucune flexion indiquant un relâchement dans la rivure ou dans les assemblages par boulons.

Les épreuves sur le tablier du pont seront faites aux frais de la Compagnie et par ses ingénieurs, mais aux risques et périls de l'entrepreneur.

Si le pont a résisté, et si après quinze jours de service d'exploitation, on n'a observé aucune augmentation de flèche ni aucune déformation, soit dans la forme des pièces, soit dans les assemblages, et si d'ailleurs l'exécution est conforme dans toutes les parties aux dessins du projet et remplit toutes les conditions prescrites au présent cahier des charges, la réception provisoire sera prononcée.

Elle sera constatée par un procès-verbal contradictoire dressé

en double expédition et signé par l'entrepreneur et le représentant de la Compagnie.

ART. 17.

Délai de garantie. — Les avaries occasionnées par les épreuves seront immédiatement réparées par l'entrepreneur, dont la responsabilité s'étend, nonobstant la réception provisoire, jusqu'à l'expiration du délai de garantie. Il devra, en conséquence, faire à ses frais, pour maintenir, pendant le délai de garantie, le travail en parfait état de conservation, toutes les opérations, telles que matage des rivets, serrage des écrous, remplacement des pièces défectueuses ou qui viendraient à s'altérer par suite de malfaçon, ou de mauvaise disposition, ou de mauvaise qualité des matières.

Si des avaries constatées sur quelques pièces indiquaient un vice général dans la fabrication ou la qualité des matières, ou dans la façon de l'ouvrage, la Compagnie aurait le droit de demander le remplacement, aux frais du fournisseur, de toutes les pièces affectées de ce vice, lors même qu'elles auraient résisté à toutes les épreuves.

ART. 18. — *Réception définitive.*

La réception définitive ne sera prononcée qu'après l'expiration du délai de garantie; elle sera reculée au delà de ce terme, de tous les retards apportés par le constructeur à faire les réparations prescrites par l'article précédent pour mettre les travaux en état d'être reçus définitivement.

CHAPITRE V

CLAUSES ET CONDITIONS GÉNÉRALES.

ART. 19. — *Surveillance.*

Surveillance à l'usine de la fabrication des matières. — L'entrepreneur devra faire réserver pour un agent de la Compagnie le droit de suivre la fabrication des matières aux usines où il les aura commandées.

Cet agent procédera aux épreuves indiquées ci-dessus et refusera toute pièce qui sera défectueuse, soit au point de vue de la qualité

de la fabrication, soit par suite d'insuffisance ou d'exagération de dimensions.

L'entrepreneur devra en outre donner la libre entrée de ses ateliers à l'ingénieur de la Compagnie ou à ses agents, qui pourront y rester tout le temps de la construction et pourront y procéder, aux frais du fournisseur, aux épreuves, essais et vérifications nécessaires pour s'assurer que les clauses du présent cahier des charges sont exactement remplies.

Les travaux sur les lieux de pose seront également surveillés par l'ingénieur de la Compagnie ou par ses agents.

ART. 20. — *Responsabilité de l'entrepreneur.*

La surveillance exercée par l'ingénieur de la Compagnie ou par ses agents dans l'usine de fabrication, à l'atelier du constructeur et sur le lieu de pose, les vérifications et épreuves, les réceptions provisoires des matériaux ou d'ouvrages exécutés n'auront, dans aucun cas, pour effet de diminuer la responsabilité de l'entrepreneur, qui restera pleine et entière jusqu'à l'expiration du délai de garantie.

ART. 21. — *Cas de force majeure.*

Ne sont pas comprises dans les cas de force majeure, les difficultés de transports ou de charrois, les détériorations, quelles qu'elles soient, des matériaux isolés ou assemblés, par suite des accidents de route ou de la violence des eaux, non plus que les chutes d'échafaudages et autres circonstances qu'une surveillance active et une bonne direction de l'entreprise peuvent prévenir et empêcher.

Les accidents de mer seront considérés comme cas de force majeure, s'il est démontré que tous les moyens possibles ont été employés pour les prévenir; mais même pour ces accidents, la Compagnie ne pourra être tenue à aucune indemnité, l'entrepreneur pouvant à ses frais se couvrir contre de tels risques par une assurance convenable, de telle sorte que les pertes en mer ne pourront justifier tout au plus qu'un retard proportionné.

Fait à le

LIGNE DE

PONTS MÉTALLIQUES

SOUMISSION POUR LA CONSTRUCTION DES PONTS MÉTALLIQUES.

Les soussignés X..., demeurant à s'engagent à exécuter les ponts métalliques dont la liste suit aux clauses et conditions indiquées plus bas.

(Suit le tableau des ponts du marché).

ART. 1^er^. — *Délais d'exécution.*

Les entrepreneurs s'engagent à livrer ces ponts complétement terminés dans les délais suivants ;

Savoir :

1° Au , les ponts désignés dans le premier lot ci-dessus;

2° Au , les ponts désignés dans le deuxième lot.

3°.....

A cet effet la Compagnie procurera à MM. X... les projets définitifs avant le . Tout retard dans la remise desdits projets entraînera un retard semblable pour la livraison des ouvrages.

Si le retard s'étendait au delà d'un mois, la prolongation qui en

sera la conséquence serait accordée aux entrepreneurs pour courir de l'origine de la bonne saison à la suite.

La Compagnie s'engage :

1° A établir des ponts de service pour tous les ouvrages d'art excédant de débouché, MM. X... devant contribuer pour un tiers dans le prix d'établissement et se charger de la construction desdits ponts, suivant le marché spécial annexé au présent traité;

2° A organiser pour le transport du matériel métallique, une voie de service sur tout le parcours de la ligne de à . Cette voie sera reliée au chemin livrée en , pour le parcours entre et , et en pour celui de à ;

3° A faire expédier à par le chemin de fer à un prix qui ne dépassera pas , et dans un délai de dix jours, à partir de l'arrivée à la gare de , les pièces métalliques des ponts qui seront amenées à cette gare par MM. X.

4° A procurer à MM. X..., pour le transport des pièces métalliques de jusqu'à pied d'œuvre, machines locomotives et plate-formes, MM. X... conservant à leur charge tous les frais de traction, y compris les alimentations provisoires nécessaires.

Ce matériel sera entretenu en bon état, et, lors de la remise à la Compagnie, MM. X... lui feront raison de la moins-value qui sera estimée par M. le directeur de l'exploitation, agréé dès à présent comme arbitre par dérogation à l'art. 7 du présent contrat.

Si la Compagnie ne fournit pas à MM. X... le moyen de transport des pièces de pont à leur arrivée à , la voie de service et le matériel nécessaire au transport à leur arrivée à , comme il est dit ci-dessus, tout retard venant de son fait comportera un retard semblable en bonne saison pour la livraison des ouvrages, cette prolongation étant entendue comme plus haut.

Il est bien entendu que MM. X... seront relevés des retards qui pourront être causés par des cas de force majeure, notamment par les accidents de mer. Les travaux qui sont à la charge des autres entrepreneurs, tels que les culées, les terrassements aux abords des ponts, devront être livrés, pour le premier lot des ponts, au mois de , et pour le deuxième lot, au mois de .

ART. 2. — *Prix.*

Les ouvrages faisant l'objet du présent marché seront payés aux prix suivants :

1° Le fer et le plomb des tabliers et garde-corps à raison de francs les 100 kilog.;
2° La fonte à raison de les 100 kilog.;
3° Les bois des tabliers à raison de le mètre cube.

Ces prix comprennent :

La fourniture des matières,
Le transport,
Le travail de construction,
Les deux premières couches de peinture,
Les frais relatifs aux vérifications et épreuves dans nos ateliers.

La Compagnie fera préparer à MM. X..... le sol nivelé qui leur sera nécessaire pour le classement des pièces à l'abord des ponts sur une longueur de voie qui ne pourra excéder.....

Les prix ci-dessus ne comprennent pas les droits et frais de douane à l'entrée de . Ces droits et frais seront payés, s'il y a lieu, par les entrepreneurs, et leur seront alors remboursés par la Compagnie sur la présentation des reçus des agents de la douane.

ART. 3. — *Établissement du prix à forfait par ouvrage.*

MM. X..... devront, dans le mois qui suivra la réception des dessins approuvés de chaque pont, remettre à la Compagnie un devis détaillé des poids et volumes de cet ouvrage.

Au moyen de ces devis vérifiés par les ingénieurs de la Compagnie, sera établi le prix total à payer à l'entrepreneur pour cet ouvrage. Ce prix ne pourra être augmenté ou diminué qu'en vertu de modifications apportées en cours d'exécution par la Compagnie.

Pour calculer les poids énoncés ci-dessus, on admettra que la densité du fer est de 7.8, et celle de la fonte de 7.2.

ART. 4. — *Modes et termes de payement.*

Les payements se feront en francs, ainsi qu'ils sont stipulés.
Ces payements seront calculés de la manière suivante :
1° Deux dixièmes des prix stipulés seront appliqués aux matières

déposées dans les ateliers des entrepreneurs à leur arrivée des usines.

2° Quatre dixièmes seront appliqués aux pièces prêtes pour l'expédition;

3° Deux dixièmes seront appliqués aux pièces déposées sur le chantier de pose et prêtes pour l'assemblage;

4° Un dixième sera appliqué aux parties du pont terminées et mises en place;

5° Le solde de la valeur totale des ouvrages sera payé à l'expiration du délai de garantie.

Toutefois si la compagnie n'y trouvait aucun inconvénient, en raison du bon état des travaux, et consentait à nous payer le dernier dixième après l'achèvement desdits travaux, elle jouirait d'un intérêt à raison de 6 p. 100 l'an sur les sommes ainsi avancées à MM. X... qui resteront, nonobstant ce payement, garants de leurs travaux jusqu'à l'époque fixée par le cahier des charges.

ART. 5. — *Retard dans l'exécution.*

Dans le cas où les travaux ne seraient pas livrés dans les délais fixés à l'article 1er, les entrepreneurs subiraient une retenue de 1200 fr. par jour de retard. Cette retenue restera acquise à la Compagnie comme indemnité des pertes résultant pour elle des retards de la mise en exploitation.

Toutefois, s'il était reconnu qu'à l'expiration des derniers délais fixés plus haut, la Compagnie n'est pas en mesure d'utiliser les ponts, ce dont elle serait seule juge, l'entrepreneur profiterait, s'il était lui-même en retard, du sursis que la Compagnie pourrait accorder sans nuire à ses intérêts.

ART. 6. — *Élection de domicile.*

Pour l'exécution des présentes, les parties font élection de domicile, savoir : . . . . .

ART. 7. — *Contestations.*

Les contestations qui pourraient s'élever entre les parties au sujet de l'exécution des clauses du présent marché, seront jugées par des arbitres dont un nommé par chacune des parties, et en

cas de désaccord des arbitres, par un troisième arbitre nommé par eux, et jugeant définitivement.

ART. 8. — *Droits d'enregistrement.*

Dans le cas où l'enregistrement du présent marché deviendrait nécessaire, les doubles droits et amendes seront à la charge de celle des parties qui sera jugée y avoir donné lieu par l'inexécution des clauses y inscrites.

ART. 9. — *Clauses et conditions générales.*

Les entrepreneurs seront d'ailleurs soumis :

1° Au cahier des charges spécial annexé au présent marché;

2° Aux clauses et conditions générales et au cahier des charges générales imposées à tous les entrepreneurs et fournisseurs de la Compagnie en tout ce à quoi il n'est pas dérogé par le cahier des charges spécial.

Fait à , le .

LIGNE DE

SOUMISSION POUR LA CONSTRUCTION DES PONTS DE SERVICE

DESTINÉS A L'ÉTABLISSEMENT D'UNE VOIE PROVISOIRE CONTINUE.

Nous soussignés X., entrepreneurs, demeurant à , nous engageons à exécuter les ponts de service compris entre et , aux conditions suivantes :

1° Les ponts de service seront établis conformément aux dessins et types qui nous seront remis;

2° Nous pourrons y employer le bois de ou le bois de ;

3° Les pieux seront battus à la sonnette à un refus qui sera déterminé par les ingénieurs de la Compagnie.

Les pieux devront présenter au moins de 25 à 26 centimètres de diamètre à la tête, et seront recepés à la hauteur indiquée sur les dessins.

4° La grosse charpente comprendra les moises, les poutres et sous-poutres, les contre-fiches et les traversines. Toutes ces pièces seront posées sans équarrissage autre que les traits de scie indispensables, et assemblées entre elles suivant les meilleurs procédés déterminés par les ingénieurs de la Compagnie.

Le diamètre de ces bois sera conforme aux cotes des dessins. Le minimum de ce diamètre pour les pièces les plus importantes de la charpente est fixé à 25 centimètres mesurés au milieu de la pièce.

5° Les tabliers des ponts de service seront faits en madriers de de 5 à 6 centimètres d'épaisseur. Ces madriers seront débités à la scie et cloués sur les poutres ou longrines du pont.

6° Nous fournirons aux prix de la série ci-dessous les fers pour boulons, étriers, sabots, chevilles, broches et clous.

7° Nous nous engageons à terminer pour le tous les ponts de service compris entre et inclusivement, au nombre de ; et ceux de à au nombre de pour le à la condition que nous recevrons

l'ordre de commencer les travaux avant le prochain; en cas de retard de notre fait, nous subirons une amende de 500 fr. pour chaque jour de retard, les cas de force majeure dûment constatés étant réservés.

8° Nous recevrons des à-comptes au fur et à mesure de l'avancement des travaux, jusqu'à concurrence des 4/5 des travaux faits et des approvisionnements constatés à pied d'œuvre.

9° Les ponts de service seront reçus par la Compagnie, s'il y a lieu, immédiatement après leur achèvement. Un mois après, à dater du jour de cette réception provisoire, aura lieu la réception définitive, qui nous donnera droit au payement immédiat du dernier cinquième du prix.

10° Nous nous chargerons, si la Compagnie l'exige, de l'enlèvement des ponts de service immédiatement après la livraison des ponts définitifs; dans ce cas et pour rémunérer ce travail, les bois de ces ponts deviendront notre propriété.

11° Dans les ponts de service relatifs aux ponts définitifs n° du premier lot, n° du deuxième lot du marché des ponts métalliques, où la voie provisoire sera établie en dehors des échafaudages devant servir à la construction des ponts définitifs, la partie du pont de service supportant la voie provisoire sera conservée jusqu'au moment de la livraison de la voie définitive.

Pour les ponts de service relatifs aux ponts définitifs n°s du premier lot, n°s du deuxième lot du marché des ponts métalliques, où l'établissement du pont définitif exigera la suppression de la voie provisoire, un délai sera accordé à l'entrepreneur pour le montage et la livraison de chaque pont définitif, à compter du jour où il aura fait connaître qu'il est prêt à commencer ce montage.

Les délais seront ainsi établis :

Six semaines pour les ponts définitifs de à de débouché.

Deux mois pour les ponts de

Pendant ces délais, la circulation sera interrompue sur la voie provisoire à l'emplacement du pont; mais, passé le délai correspondant, une amende de sera imposée à l'entrepreneur pour chaque jour de retard dans la livraison du pont définitif;

12° Les diverses fournitures relatives à l'établissement de ces ponts de service nous seront payées suivant le prix de la série ci-après; lesquels prix comprennent la fourniture des matériaux et les frais de construction.

N° 1. Fourniture, battage et recepage d'un pieu de pont de service au mètre courant de fiche

N° 2. Fourniture, sciage, assemblage et mise en place de 1 mètre cube de grosse charpente en bois de

N° 3. Fourniture, sciage et mise en place de 1 mètre carré de planchers en madriers de

N° 4. Un kilogramme de fer pour liens, frettes, étriers, broches, sabots, chevilles, clous et boulons

13° Nous nous soumettons, en tout ce à quoi il n'est pas dérogé par le présent contrat, au cahier des charges et aux conditions générales imposées aux entrepreneurs de la Compagnie.

14° Toute contestation au sujet de l'exécution des travaux faisant l'objet du présent marché sera portée devant M. le directeur de la construction qui prononcera en dernier ressort, et dont nous déclarons accepter d'avance la décision.

Fait à , le .

MÉTRÉ DU PONT DE 60 MÈTRES.

Pour une ferme :

Bandes horizontales.	35,400 kil.
Treillis.	14,600
Parties portant sur les appuis.	2,700
Total pour une ferme.	52,700 kil.

Pour les quatre fermes..	210,800 kil.
Entretoisements et contre-ventements.	64,800
Total pour tout le pont. . . .	275,600 kil.
Poids à valoir.	4,400
Total définitif.	280,000 kil.

Longueur totale de la partie métallique : 61^{m}.50.

Poids par mètre courant :	pour le pont entier. . .	4,553 kil.
	pour une ferme. . . .	1,138

au lieu du poids calculé, de 1,045 kil.

Paris. — Imprimé par E. Thunot et C^{e}, rue Racine, 26.